



# Modélisation de la cavitation par une approche à interface diffuse avec prise en compte de la tension de surface

Takfarines Ait Ali

## ► To cite this version:

Takfarines Ait Ali. Modélisation de la cavitation par une approche à interface diffuse avec prise en compte de la tension de surface. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM, 2015. Français. <NNT : 2015ENAM0024>. <tel-01288924>

**HAL Id: tel-01288924**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/tel-01288924>**

Submitted on 15 Mar 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Science des Métiers de l'ingénieur

**Doctorat ParisTech**

**T H È S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

**Spécialité “ Mécanique ”**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Takfarines AIT-ALI**

le 29 septembre 2015

**Modélisation de la cavitation par une approche à interface diffuse  
avec prise en compte de la tension de surface**

Directeur de thèse : **Sofiane KHELLADI**  
Co-encadrement de la thèse : **Farid BAKIR**

**Jury**

**M. Sébastien MARTIN**, Professeur des Universités, Paris Descartes Laboratoire MAP5, France  
**M. Xesús NOGUEIRA**, HDR, Université de la Corogne, Civil Engineering School, Espagne  
**Mme Regiane FORTES PATELLA**, Professeur des Universités, LEGI, INP Grenoble, France  
**M. Nouredine HANNOUN**, HDR, USTHB, Département Mathématiques, Algérie  
**M. Sofiane KHELLADI**, Professeur des Universités, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech, France  
**M. Farid BAKIR**, Professeur des Universités, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech, France

Président  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

**T  
H  
È  
S  
E**



# Remerciements

Le travail réalisé au cours de ces trois années et le manuscrit de thèse n'auraient jamais vu le jour sans l'aide de nombreuses personnes. La première est bien entendu mon directeur de thèse, le professeur Sofianne Khelladi, qui m'a permis par ses conseils et ses aiguillages de comprendre et de bien construire la problématique de la thèse. Je le remercie aussi de m'avoir permis d'apporter ma modeste contribution au code de calcul qu'il est en train de développer au niveau du laboratoire. Je n'ai réussi à résoudre les difficultés numériques rencontrées que grâce aux perfectionnements qu'il apporte continuellement au code de calcul. J'ai appris beaucoup dans le domaine des méthodes numérique durant nos trois années de collaboration.

Je tiens à remercier tout particulièrement mon co-encadrant, le professeur Farid Bakir, de sa confiance, de son esprit critique et de ces apports surtout en terme de bibliographie qui m'ont permis d'élargir ma vision de la problématique physique et de trouver des solution là où je n'aurais jamais été les chercher. Je le remercie aussi en sa qualité de chef du laboratoire Dynfluid qui a su instaurer un excellent cadre de travail en facilitant l'accès aux outils disponible au laboratoire. J'adresse aux membre de l'équipe turbomachines, M. Ricardo Noguera, M. Christophe Sarraf, M. Florent Ravelet, M. Michael Deligant, mes sincères remerciements, pour avoir passé ces trois ans dans de si bonnes conditions professionnelles.

J'exprime aux membres du jury ma profonde reconnaissance, pour avoir accepté de juger mon travail, et pour leur lecture attentionnée de mon mémoire de thèse. M. Martin, merci pour votre présidence et votre disponibilité. Merci, M. Nogueira, Mme Fortes Patella, pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse et pour vos commentaires et remarques pertinentes qui m'ont aidé à améliorer la qualité de mon manuscrit. Merci à M. Hannoun pour avoir été présent et pour toutes ces remarques.

Je remercie aussi ma bande d'amis : Joseph, Petar, Charles, Salah, Moises, Richard, Ewan pour la bonne ambiance et pour toute l'aide qu'ils m'ont apporté (surtout en terme de machines de calcul).

Je remercie finalement ma famille, ma femme Fahima, mes enfants, mes parents, mon frère et ma sœur . Merci infiniment pour votre soutien.



# Table des matières

<b>Nomenclature</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction Générale</b>	<b>3</b>
1.1 Objectifs de la thèse . . . . .	5
1.2 Contenu de la thèse . . . . .	6
<b>2 Généralités sur la cavitation</b>	<b>7</b>
2.1 Introduction . . . . .	7
2.2 Définition . . . . .	8
2.2.1 Dôme de saturation . . . . .	9
2.2.2 Types de cavitation . . . . .	9
2.3 Phénomènes liés à la cavitation . . . . .	12
2.3.1 Transition de phase . . . . .	12
2.3.2 Compressibilité du fluide . . . . .	13
2.3.3 Effets des gaz dissouts . . . . .	13
2.3.4 Phénomène du collapse . . . . .	13
2.3.5 Mécanismes d'érosion . . . . .	14
2.4 La tension de surface . . . . .	16
2.4.1 Définition . . . . .	16
2.4.2 Effet de la tension de surface sur la formation des bulles de cavitation . . . . .	16
2.4.3 Effets de la tension de surface sur la convection des bulles	17
2.4.4 Effet de la tension de surface sur le collapse de la bulle . .	17
2.5 Nombres addimensionnels . . . . .	17
2.5.1 Nombre de cavitation . . . . .	17
2.5.2 Nombre de Weber . . . . .	18
2.5.3 Nombre capillaire . . . . .	19
2.5.4 Nombre de Bond . . . . .	19
2.5.5 Nombre de Strouhal . . . . .	19
2.5.6 Nombre de Mach . . . . .	19
2.6 Conclusion . . . . .	20
<b>3 Modélisation de la cavitation</b>	<b>21</b>
3.1 Introduction . . . . .	21
3.1.1 Modèles à deux fluides . . . . .	22
3.1.2 Modèles à un fluide . . . . .	22

---

3.1.3	Modèle à particules . . . . .	23
3.2	Le Modèle d'équilibre homogène . . . . .	24
3.2.1	Introduction . . . . .	24
3.2.2	Définition . . . . .	24
3.2.3	Hypothèses de base . . . . .	24
3.2.4	Les avantages du modèle d'équilibre homogène . . . . .	25
3.3	Système d'équations pour le modèle d'équilibre homogène . . . . .	26
3.3.1	Équations de conservation . . . . .	26
3.3.2	Procédure de calcul des variables primitives . . . . .	27
3.3.3	Algorithme de transition de phase . . . . .	27
3.3.4	Équations d'état . . . . .	28
3.3.5	Prise en compte de la gravité . . . . .	34
3.4	Prise en compte de la tension de surface . . . . .	36
3.4.1	Modèle direct . . . . .	36
3.4.2	Modèle indirect . . . . .	37
3.4.3	Le calcul du coefficient capillaire $\lambda$ . . . . .	39
3.5	Conclusion . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Méthode Numérique</b> . . . . .	<b>45</b>
4.1	Introduction . . . . .	45
4.2	Équations à résoudre . . . . .	46
4.3	Formulation en volumes finis . . . . .	47
4.4	Méthode MLS . . . . .	49
4.4.1	Définition . . . . .	49
4.4.2	Le Stencil . . . . .	49
4.4.3	Formulation . . . . .	51
4.4.4	Fonctions de forme . . . . .	52
4.4.5	Fonctions Kernel . . . . .	53
4.4.6	Estimation des Dérivées Spatiales . . . . .	53
4.5	Discrétisation des flux numériques . . . . .	55
4.5.1	Flux de convection . . . . .	55
4.5.2	Flux de diffusion . . . . .	58
4.6	Traitement des termes sources . . . . .	58
4.6.1	Le terme source de gravitation $S_G$ . . . . .	59
4.6.2	Le terme source de tension de surface . . . . .	60
4.7	Discrétisation temporelle . . . . .	61
4.8	Considérations liées au modèle numérique . . . . .	62
4.8.1	Traitement de la turbulence et la méthode FV-MLS : l'ap- proche MILES . . . . .	62

4.8.2	Les discontinuités et les ordres élevés . . . . .	62
4.8.3	Conditions aux limites . . . . .	64
4.9	Conclusion . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Résultats et Discussions</b>	<b>67</b>
5.1	Introduction . . . . .	67
5.2	Validation du modèle de tension de surface . . . . .	68
5.2.1	Cas test de la bulle à l'équilibre statique . . . . .	68
5.2.2	Cas test de coalescence de deux bulles . . . . .	75
5.2.3	Cas test de la goutte d'eau sur une paroi solide . . . . .	78
5.3	Étude de l'effet de la tension de surface sur le collapse d'une bulle de cavitation . . . . .	80
5.3.1	Influence de la tension de surface sur l'intensité du collapse	80
5.3.2	Étude de l'influence de la tension de surface sur la vitesse du collapse . . . . .	83
5.4	Effet de la tension de surface sur la fréquence de cavitation . . . .	87
5.4.1	Domaine de calcul . . . . .	87
5.4.2	Résultats et commentaires . . . . .	89
5.5	Conclusion . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Conclusion Générale</b>	<b>95</b>
6.1	Résumé . . . . .	95
6.2	Validation du modèle . . . . .	96
6.3	Calculs d'application . . . . .	97
6.4	Perspectives . . . . .	98
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Calcul de la température dans la phase mélange</b>	<b>105</b>
A.1	Méthode de Newton . . . . .	105
A.2	Méthode de sous-relaxation . . . . .	105
<b>B</b>	<b>Formules de saturation pour la pression et les densités liquide et vapeur</b>	<b>107</b>





# Table des figures

1.1	Cavitation dans un inducteur à gauche [35] et dans une pompe centrifuge à droite [1] . . . . .	3
1.2	Schéma illustrant la cavitation (implosion) d'une bulle de vapeur à proximité d'un revêtement nanoparticulaire, et l'arrachement (éjection) de nanoparticules qui en résulte [18]. . . . .	4
2.1	Dôme de saturation : en points bleus isotherme de changement de phase théorique et en pointillés rouges la courbe réelle . . . . .	10
2.2	Diagramme de changement de phase [6] . . . . .	10
2.3	cavitation à bulles séparées [15] . . . . .	11
2.4	poche de cavitation sur un profil d'aile [15] . . . . .	11
2.5	cavitation par filaments à l'extrémité d'une aile immergée [15] . . . . .	12
2.6	Collapse d'une bulle de cavitation en écoulement libre. [6] . . . . .	14
2.7	Photo d'une bulle en train d'imploser, début de formation du microjet [45] . . . . .	15
2.8	Implosion d'une bulle de vapeur proche d'une paroi et générée par laser. On voit bien le microjet sur le deuxième niveau [28] . . . . .	16
2.9	Effet de la tension de surface sur la force du jet liquide [34] . . . . .	18
3.1	Vitesse du son calculée pour un fluide de Van Der Waals à $T = 295K$ . . . . .	31
3.2	Variation de la pression en fonction de la masse volumique avec une formulation de Van Der Waals . . . . .	31
3.3	L'équation d'état de Van Der Waals et l'équation d'état de Tait modifiée pour une température de $295K$ . . . . .	32
3.4	Représentation de l'interface diffuse liquide-vapeur. Interface plane en 2d . . . . .	40
4.1	Volume de contrôle en 2D pour un maillage triangulaire . . . . .	48
4.2	représentation du stencil en 2D avec ses caractéristiques . . . . .	50
4.3	représentation de la solution continue par morceau reconstruite dans un stencil de 5 éléments en 1D . . . . .	51
4.4	la forme de la fonction kernel suivant la valeur du paramètre de forme $\kappa$ [37] . . . . .	54
4.5	Les points de calcul des flux numériques au centre de l'arrête . . . . .	57

4.6	Les deux types de stencils utilisés pour la reconstruction MLS : a. stencil utilisé dans la reconstruction de la solution et b. le stencil utilisé pour l'intégration des flux visqueux [8] . . . . .	58
4.7	Écoulement cavitant autour d'un profil d'aile. Instabilité à l'interface liquide-vapeur pendant la formation d'une poche de cavitation juste avant que le calcul diverge. . . . .	63
4.8	Élément fictif servant à la mise en place des conditions aux limites	64
5.1	Schéma du cas test d'équilibre statique, avec $n$ le nombre de mailles sur un coté du carré . . . . .	69
5.2	La pression dans une bulle statique estimée par l'équation de Van Der Waals addimensionnelle . . . . .	70
5.3	la distribution des vitesses suivant l'axe des $x$ et l'axe des $y$ à $t=10$	70
5.4	Évolution de l'énergie totale pour le cas test de la bulle statique au cours du temps . . . . .	71
5.5	La densité pour le cas test de l'équilibre statique $\lambda = 4 \cdot 10^{-9}$ . .	72
5.6	Évolution au cours du temps de la densité et de la pression au centre de la bulle pour le cas test de l'équilibre statique $\lambda = 4 \cdot 10^{-9}$ isotherme avec $T = 373K$ . . . . .	73
5.7	La densité pour le cas test de l'équilibre statique $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-6}$ : (a) état initial. (b) Résultat final . . . . .	75
5.8	tracé sur l'axe $y=0$ des variable à l'équilibre $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-6}$ : (a) Pression. (b) Température. (c) force de tension de surface . . . . .	76
5.9	la distribution de densité addimensionnelle pour le cas test de la coalescence de deux bulles : (a) état initial. (b) à $\tilde{t} = 2$ . (c) à $\tilde{t} = 5$ .(d) état final . . . . .	77
5.10	la pression et la vitesse addimensionnelles dans le cas de la coalescence de deux bulles . . . . .	78
5.11	Évolution de l'énergie totale au cours du temps pour le cas test de la coalescence . . . . .	79
5.12	l'aplatissement de la goutte d'eau sous l'effet de différentes valeurs de la force de gravité . . . . .	80
5.13	Vue rapprochée du maillage autour du profil NACA0015 . . . . .	81
5.14	(a) Pression maximale atteinte lors du collapse (Pa), (b)Onde de pression générée par le collapse (Pa) . . . . .	82
5.15	Variation de l'intensité du collapse en fonction de la tension de surface . . . . .	83
5.16	L'évolution de la densité au centre de la bulle pour différente valeurs du coefficient capillaire $\lambda$ (entre 0 et $10^{-8}$ ) . . . . .	84

---

5.17 L'évolution de la densité au centre de la bulle pour différentes valeurs du coefficient capillaire $\lambda$ (entre $10^{-8}$ et $10^{-7}$ ) . . . . .	86
5.18 L'évolution de la vitesse de l'interface liquide-vapeur pour différentes valeurs du coefficient capillaire $\lambda$ (entre $10^{-8}$ et $10^{-7}$ ) . . . .	86
5.19 Évolution de la forme de la bulle de cavitation pendant le collapse	88
5.20 la forme du maillage autour du cylindre . . . . .	89
5.21 Évolution de la densité s'étalant sur une période de lâché de cavitation pour un écoulement sans tension de surface (a.) et avec tension de surface (b.) . . . . .	91
5.22 Le signal du volume de vapeur dans le domaine ( $m^2$ ) pour environ 10 lâchés de bulle de cavitation . . . . .	92
5.23 Spectre du signal du volume de vapeur servant à déterminer la fréquence de lâché de bulle de cavitation . . . . .	93



# Nomenclature

ABREVIATION	DESCRIPTION	UNITÉS
NSK	Navier-Stokes & Korteweg	-
FV	Volume Finis	-
MLS	Moving Least Square (Moindre Carrés Mobiles)	-
AUSM	Advection Upstream Splitting Method	-
SLAU	Simple Low dissipation AUSM	-

Grandeurs	DESCRIPTION	UNITÉS
$\sigma$	tension de surface	N/m
$\sigma_c$	nombre de cavitation	-
$\lambda$	Coefficient capillaire	$m^7/kg s^2$
$\kappa$	Coefficient de forme de la fonction kernel exponentielle	-
$k$	Conductivité thermique	J/Km <sup>2</sup>
$\alpha$	fraction vapeur	-
$R$	Rayon de la bulle	[m]
$\rho_l$	Masse volumique du liquide	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_{l.sat}$	Masse volumique du liquide à saturation	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_v$	Masse volumique de la vapeur	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_{v.sat}$	Masse volumique de la vapeur à saturation	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_m$	Masse volumique du mélange	[kg/m <sup>3</sup> ]
$p_{sat}$	Pression de saturation	[Pa]
$\mu_l$	Viscosité dynamique du liquide	[kg/m · s]
$\mu_v$	Viscosité de la vapeur	[kg/m · s]
$\mu_m$	Viscosité du mélange	[kg/m · s]
$T$	Température	[K]
$c$	Vitesse du son dans un milieu	m/s
$S_t$	Nombre de Strouhal	-
$Re$	Nombre de Reynolds	-
$C_{vv}$	Capacité calorifique de la vapeur à volume constant	[J/kgK]
$C_{vl}$	Capacité calorifique de l'eau liquide à volume constant	[J/kgK]
$\gamma_v$	Coefficient adiabatique de la vapeur d'eau	-
$E$	Densité d'énergie totale	[J/kg]
$e$	Densité d'énergie interne	[J/kg]
$\check{\Phi}$	La variable $\Phi$ est addimensionnelle	-
$f$	Fréquence	[Hz]
$W$	Fonction Kernel	-
$N_s$	Nombre d'éléments total du stencil	-
$N_{s,min}$	Le nombre d'élément minimum que doit contenir le stencil	-
$h_s$	La distance entre le centre du stencil et l'élément le plus éloigné	-
$h$	Taille caractéristique d'une maille	[m]

# Introduction Générale

---

La cavitation est un phénomène qu'on retrouve dans les machines et dispositifs qui fonctionnent avec des fluides à l'état liquide. On peut citer comme exemple les pompes, les inducteurs (voir la figure 1.1), les injecteurs et les hélices de bateaux ou de sous-marins. Ses aspects négatifs sont nombreux : le bruit, les vibrations, la chute des performances ou encore la dégradation des matériaux par érosion. C'est pour cela qu'elle est prise en compte dans la conception de ces machines. L'enjeu industriel est important ; des économies substantielles peuvent être faites en diminuant les effets néfastes de la cavitation.



FIGURE 1.1 – Cavitation dans un inducteur à gauche [35] et dans une pompe centrifuge à droite [1]

Même si de nombreuses études ont été réalisées sur ce phénomène, il reste un sujet de recherche très prisé par les scientifiques du fait de sa complexité. La formation des bulles de cavitation et leur implosion sont des phénomènes à plusieurs échelles : le nombre de Mach peut varier de 0.0001 à 4 et la densité de 0.01 à 1000 (dans le cas de l'eau) sur un intervalle spatial à peine plus grand que le nanomètre. De plus la cavitation est affectée par plusieurs facteurs physiques dus à la nature du fluide ou à son environnement. Les écoulements cavitants sont souvent turbulents (sauf dans le cas de microfluides) et sont le siège de changement de phase, de transfert de masse et de chaleur et d'onde de choc.

Le phénomène de cavitation a fait l'objet d'études dès le début du siècle. On peut citer le travail de Rayleigh [41] en 1917 qui traite de la pression générée



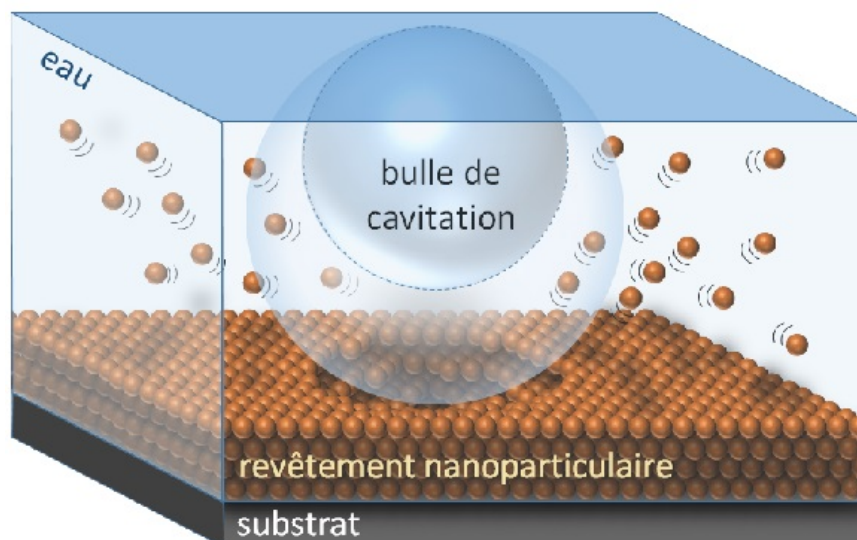


FIGURE 1.2 – Schéma illustrant la cavitation (implosion) d'une bulle de vapeur à proximité d'un revêtement nanoparticulaire, et l'arrachement (éjection) de nanoparticules qui en résulte [18].

lors de l'implosion d'une bulle de cavitation et qui a abouti à un modèle simplifié qui néglige les effets thermiques, la viscosité et la compressibilité du fluide. Par la suite, les études successives ont permis de mettre en évidence des phénomènes liés à la cavitation tel que le phénomène du microjet découvert en 1945 par Kornfeld et al. [25]. L'érosion due à la cavitation est elle aussi un sujet d'étude très prisé. Après une longue controverse sur la cause de cette érosion, il a été conclu que c'est un effet combiné de l'onde de surpression générée lors de l'implosion et du microjet, même si l'implosion de chaque bulle n'enlève qu'une micro quantité de matière (comme le montre la figure 1.2).

Dans le but de prédire le phénomène de cavitation, une approche multiphasique est généralement adoptée. Deux grandes familles de modèles sont utilisés : les modèles à phases dispersées et les modèles à phases séparées. Dans les modèles à phases dispersées, on considère un nombre fini de particules (des gouttes ou des bulles) disséminées dans un volume constitué d'une phase continue. Dans les modèles à phases séparées, on considère plusieurs flux continus composés de différents fluides séparés entre eux par des interfaces. Il existe néanmoins une alternative aux modèles multiphasiques. Il s'agit des modèles qui consistent à considérer un seul et unique fluide, dont les propriétés physiques sont déterminées en utilisant des pondérations grâce notamment à la fraction massique ou volumique d'une des phases qui composent l'écoulement. Ce type de modèles est appelé modèle homogène par rapport aux propriétés physiques du fluide qu'on

nomme phase de mélange. On peut citer comme exemple les modèles barotropes qui utilisent les vitesses du son des deux phases pures pour calculer la vitesse du son dans le mélange. C'est ce modèle (modèle homogène) qui a été choisi dans cette thèse.

## 1.1 Objectifs de la thèse

Notre travail s'inscrit dans une continuité des travaux de recherche du laboratoire DynFluid, équipe turbomachines, qui traitent de la modélisation des écoulements diphasiques en général et des écoulements cavitants en particulier. La thèse de L. Bergerat [3] soutenue en 2012 a permis de mettre en place un modèle de cavitation utilisant les équations de Naviers-Stokes prenant en compte le changement de phase et résolues par la méthode des volumes finis avec une approximation par moindres carrés mobiles. Outre le modèle de cavitation, cette thèse nous a fourni un code de calcul fonctionnel permettant la simulation d'écoulement biphasique et pouvant servir de support de base pour le développement de modèles de cavitation plus sophistiqués.

L'objectif de cette thèse est de développer un modèle de cavitation à interface diffuse basé sur les équations de Navier-Stokes & Korteweg. Ce modèle a pour but de prendre en compte les effets de la tension de surface connaissant le gradient de la masse volumique à travers l'interface liquide-vapeur. Ce type de modèle a déjà été proposé par exemple dans le travail de Diehl 2007 [12] qui lui associe l'équation d'état de Van Der Waals. Dans cette thèse nous optons pour l'équation d'état de Tait Modifiée qui se rapproche plus du comportement physique de l'eau aux températures de fonctionnement des turbomachines. Pour valider l'implémentation de la tension de surface dans notre code de calcul, nous utilisons des cas test simples dans lesquels les effets capillaires sont prédominants.

Une fois le code validé, nous réaliserons des calculs qui correspondront à des cas physiques pour étudier l'effet de la tension de surface sur les mécanismes de la cavitation. Dans un premier cas, nous verrons l'influence des forces de tension de surface sur l'intensité du collapse d'une bulle de cavitation se formant sur l'extrados d'un profil d'aile immergé. Dans un second cas, nous nous intéresserons à l'effet des forces capillaires sur la périodicité de détachement des bulles de cavitation dans un cylindre immergé. Les calculs sont réalisés en situation bidimensionnelle.

## 1.2 Contenu de la thèse

Le rapport est divisé en quatre chapitres :

Dans le chapitre 2, nous donnons une définition détaillée du phénomène de cavitation et des mécanismes qui le composent. Nous listons les phénomènes liés à la cavitation et comment ces derniers influent sur la formation, l'évolution et l'implosion des bulles de cavitation. Parmi les paramètres influant sur la cavitation, nous mettons l'accent sur les effets de la tension de surface et citons quelques études sur le sujet.

Le chapitre 3 contient le détail du modèle de cavitation pour lequel nous avons opté. Les différentes équations utilisées dans la thèse y sont résumées et mises en forme. Ce chapitre comprend le développement des équations de conservation en deux dimensions, les équations d'état et les formules de calcul des paramètres physiques de la phase mélange ainsi que la forme addimensionnelle de l'équation d'état de Van Der Waals. Nous proposons une méthode pour le calcul du coefficient capillaire  $\lambda$  (voir l'équation 3.42).

On présente dans le chapitre 4 la méthode numérique utilisée pour la résolution des équations. Le développement en volumes finis et l'approximation par moindres carrés mobile y sont détaillés. La discrétisation spatiale et temporelle des équations de conservation y sont expliquées. Nous traitons aussi de la manière dont sont calculés les flux numériques et comment sont imposées les conditions aux limites. Enfin nous y décrivons l'algorithme de changement de phase qui permet de calculer la pression, la température et la fraction volumique à l'équilibre.

Dans le dernier chapitre, nous présentons les cas test et les calculs réalisés ainsi que les résultats obtenus. Les cas test de validation sont les suivants : le cas test de la bulle statique, la coalescence de deux bulles de vapeur et le cas d'une goutte d'eau sur une surface solide. En ce qui concerne les calculs d'application, nous traitons le cas de l'implosion d'une bulle de cavitation sur l'extrados d'un profil d'aile immergé puis le cas du collapse d'une bulle de vapeur sous l'effet d'un gradient de pression entre cette bulle et l'extérieur et enfin nous étudions l'effet de la tension de surface sur la fréquence de cavitation se formant dans le sillage d'un cylindre immergé.

Nous terminons par une conclusion générale qui synthétise le travail réalisé ainsi que les résultats obtenus. Un bilan est fait sur les objectifs fixés. Nous donnons aussi quelques perspectives pour améliorer le modèle de cavitation.

# Généralités sur la cavitation

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2.2</b>	<b>Définition</b>	<b>8</b>
2.2.1	Dôme de saturation	9
2.2.2	Types de cavitation	9
<b>2.3</b>	<b>Phénomènes liés à la cavitation</b>	<b>12</b>
2.3.1	Transition de phase	12
2.3.2	Compressibilité du fluide	13
2.3.3	Effets des gaz dissouts	13
2.3.4	Phénomène du collapse	13
2.3.5	Mécanismes d'érosion	14
<b>2.4</b>	<b>La tension de surface</b>	<b>16</b>
2.4.1	Définition	16
2.4.2	Effet de la tension de surface sur la formation des bulles de cavitation	16
2.4.3	Effets de la tension de surface sur la convection des bulles	17
2.4.4	Effet de la tension de surface sur le collapse de la bulle	17
<b>2.5</b>	<b>Nombres addimensionnels</b>	<b>17</b>
2.5.1	Nombre de cavitation	17
2.5.2	Nombre de Weber	18
2.5.3	Nombre capillaire	19
2.5.4	Nombre de Bond	19
2.5.5	Nombre de Strouhal	19
2.5.6	Nombre de Mach	19
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>20</b>

---

## 2.1 Introduction

Le phénomène de cavitation suscite de nombreux travaux de recherche pour les raisons suivantes : la première étant la diversité des applications dans les-

quelles elle se développe : machines hydrauliques (turbines, propulseurs...), le domaine biomédical .... La deuxième étant liée aux différentes formes qu'elle est susceptible de prendre : bulles, poches, tourbillons, nuages de vapeur, filaments de vapeur. La troisième est liée aux comportements complexes que la cavitation peut adopter dans certaines situations : instationnarités, instabilités, interactions, couplages. Enfin, l'intérêt que l'on continue à lui porter réside dans les interrogations propres à l'hydrodynamique qu'elle soulève : l'influence des paramètres fondamentaux de l'hydrodynamique (la tension superficielle, la viscosité, la composition du fluide...)

La modélisation de la cavitation constitue encore aujourd'hui un défi pour la CFD qui cherche à reproduire la formation des bulles de cavitation, leurs évolutions dans le fluide ainsi que les interactions, le phénomène de collapse qui génère les ondes de chocs responsables de l'érosion, sans oublier l'aspect acoustique.

Dans ce chapitre nous donnons une description du phénomène de cavitation tout en énumérant les mécanismes que nous essayerons de modéliser et les principaux facteurs influents sur ces derniers. Nous allons aussi définir les nombres addimensionnels utilisés lors de notre étude dans le cadre de la validation des codes de calcul et l'analyse des résultats.

## 2.2 Définition

La cavitation est le phénomène de vaporisation des liquides soumis à de fortes dépressions qui sont généralement dues à l'augmentation de leurs vitesses d'écoulement. Elle se produit le plus souvent dans les machines hydrauliques telles que les hélices de bateau, les inducteurs ou encore les venturis. Les conséquences de la cavitation sont en général néfastes. Elle est à l'origine de l'érosion des hélices et des aubes de turbines. Elle génère du bruit et provoque des chutes de performances.

La définition de la cavitation est toujours accompagnée du diagramme de changement de phase figure 2.2 qui montre que dans certains cas le passage de la phase liquide à la phase vapeur se fait à température constante. Il faut bien comprendre que cette transformation de phase (vaporisation) a besoin d'un apport de chaleur correspondant à la chaleur latente de vaporisation. Il en résulte donc une diminution de la température du liquide environnant la cavité de vapeur. D'après Brennen [6], le passage du liquide à la vapeur et vice versa se fait par le fractionnement de la substance homogène originale en un mélange de deux phases différentes.

### 2.2.1 Dôme de saturation

Dans le diagramme présenté sur la figure 2.2, on voit deux lignes discontinues qui représentent la ligne de vapeur spinodale et la ligne de liquide spinodale. La cavitation du liquide peut se faire de deux manières : dans la première, le liquide contient un nombre conséquent de sites de nucléation dépassants une certaine dimension (poche de gaz dissous), alors le liquide évolue jusqu'à atteindre un état gazeux stable à la pression de saturation, ce qui correspond à la ligne rouge en pointillés nommée "Real curve" sur la figure 2.1. Dans la seconde manière, le liquide ne contient pas assez de sites de nucléation, il conserve sa forme liquide jusqu'à atteindre la pression correspondant à la ligne de liquide spinodale. Le liquide est alors dans un état métastable jusqu'à ce qu'une imperfection (rugosité de la paroi par exemple) déclenche le changement de phase, ce qui correspond à la ligne bleue nommée "Theoretical curve" sur la figure 2.1. A l'état métastable, le liquide est dit sous tension et l'intensité de cette tension est égale à la différence de pression entre cet état et la pression de saturation liquide vapeur du premier cas. C'est le même phénomène qui se produit lors de la surfusion.

L'eau à température ambiante supporte une tension théorique de  $-500\text{Atm}$  ce qui correspond à la pression minimale de l'isotherme de Van Der Waals. En pratique, la cohésion du liquide est rompue bien avant d'atteindre cette pression et cela est dû à l'existence de points faibles dans le liquide appelés germes de cavitation. Un exemple de germe : une bulle de  $1\mu$  de diamètre dans l'eau à température ambiante limite le déséquilibre à  $-3\text{bars}$  d'après Lecoffre [30]. L'apparition de la cavitation est caractérisée par un nombre addimensionnel noté  $\sigma_c$  (voir la section 2.5.1).

### 2.2.2 Types de cavitation

Nous présentons dans ce chapitre une classification qui est largement utilisée dans la documentation. Elle est tirée du livre de Franc et al. [15].

#### 2.2.2.1 La cavitation à bulles séparées

Elle est le résultat de l'apparition et le grossissement rapide de germes de cavitation dans l'écoulement (voir figure 2.3). Ces bulles disparaissent ensuite en implosant lorsque l'écoulement les a convectées dans des zones de pression plus importante. C'est la cavitation typique des profils à faible incidence. Elle se produit près du profil, sous forme de bulles sphériques ou hémisphériques, initiées à partir de "germes", assimilables à des micro-bulles, initialement présents dans le liquide.

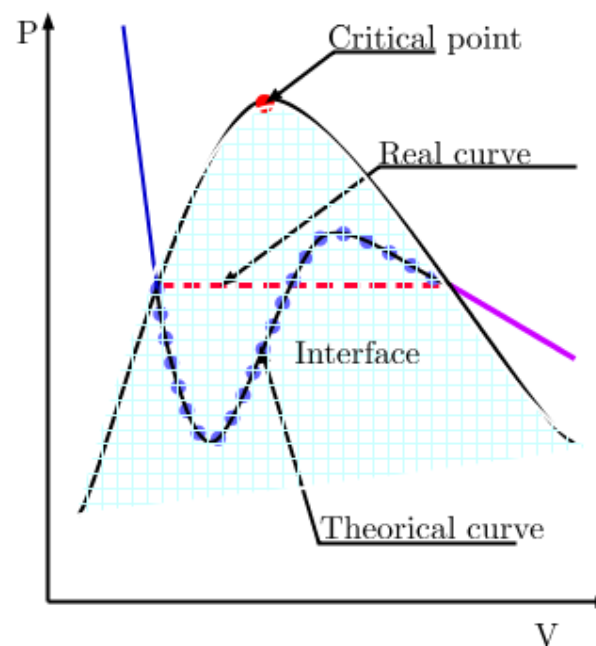


FIGURE 2.1 – Dôme de saturation : en points bleus isotherme de changement de phase théorique et en pointillés rouges la courbe réelle

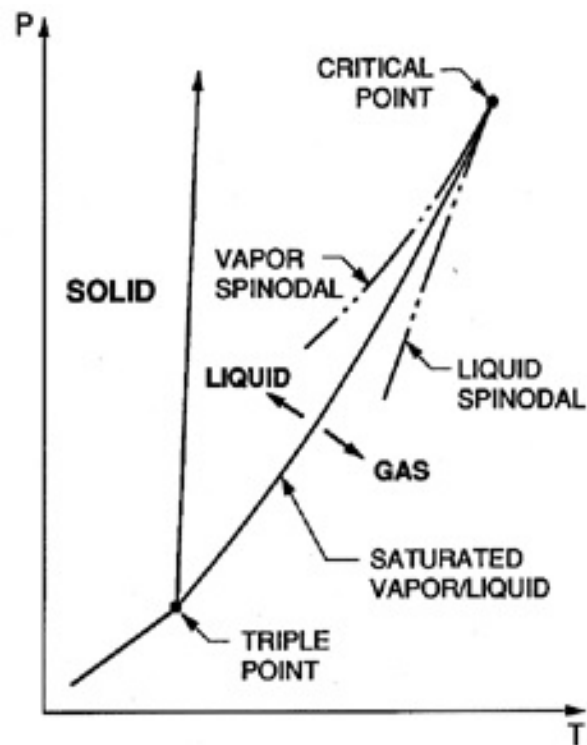


FIGURE 2.2 – Diagramme de changement de phase [6]

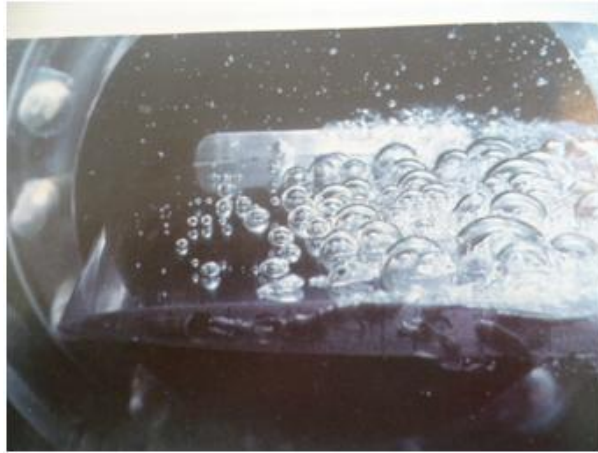


FIGURE 2.3 – cavitation à bulles séparées [15]



FIGURE 2.4 – poche de cavitation sur un profil d'aile [15]

### 2.2.2.2 Cavitation à poche attachée

La cavitation à poche est liée à un décollement laminaire situé en général à l'extrados des aubes de turbomachines et des pales d'hélices ou de plans porteurs d'hydroptères (voir figure 2.4). Par l'effet du jet rentrant, des bulles de vapeur sont formées en aval de la cavité (ou poche). Les poches ainsi formées sont entraînées et se condensent brutalement, par l'effet du gradient de pression, jusqu'à l'implosion. Vu la périodicité de ce phénomène il est caractérisé par un nombre de Strouhal défini à partir de la fréquence des lâchers de poches.



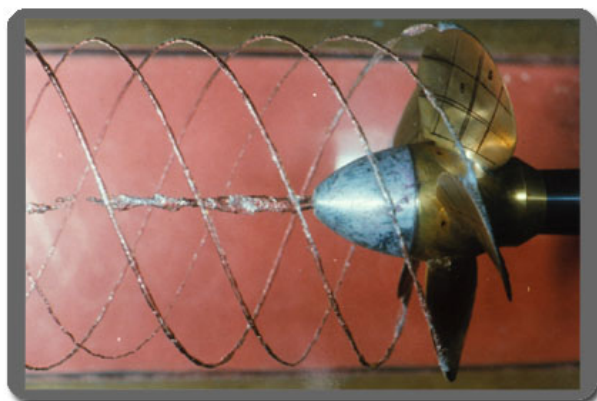


FIGURE 2.5 – cavitation par filaments à l'extrémité d'une aile immergée [15]

### 2.2.2.3 Cavitation par filaments tourbillonnaires

Ce phénomène résulte de la dépression présente dans les zones de forte vorticité de l'écoulement. On la retrouve principalement en bout de pale, où les cisaillements sont importants (voir figure 2.5).

## 2.3 Phénomènes liés à la cavitation

Le phénomène de cavitation peut être subdivisé en plusieurs mécanismes dont la modélisation passe par leur compréhension et par celle des facteurs pouvant les affecter. Nous avons mis l'accent sur les mécanismes de transition de phase, du collapse et de l'érosion car ils sont en étroite relation avec l'objet de notre étude qui est la tension de surface.

### 2.3.1 Transition de phase

Elle intervient lors des différentes étapes de la cavitation. C'est le transfert de masse entre la phase liquide et vapeur lors de la formation et de la croissance d'une bulle de cavitation et l'inverse lors de la condensation.

Pour que le fluide passe de l'état liquide à celui de vapeur il a besoin d'une énergie qui est appelée énergie latente de vaporisation. Dans ce cas on remarque un refroidissement localisé de la bulle de vapeur ainsi formée et du liquide qui est en contact direct. Cela a pour effet de diminuer la pression de saturation (la pression à laquelle se produit la transition de phase) et donc de retarder la formation ou la croissance des bulles de cavitation. Par exemple quand la température passe de  $293K$     $292K$  la pression de saturation passe de  $2318Pa$     $2178Pa$ . Lors du collapse, du fait des vitesses élevées, une partie de la vapeur

n'a pas le temps de se condenser ce qui conduit à une forte surpression et une augmentation de la température au centre de la bulle.

Pour modéliser ces deux phénomènes (le retard à la cavitation et la condensation partielle lors du collapse) il faut tenir compte du transfert de chaleur entre les phase et de l'énergie latente de vaporisation.

### 2.3.2 Compressibilité du fluide

S'il on veut modéliser l'acoustique liée à la cavitation et reproduire le comportement du fluide dans une poche de cavitation qui contient un mélange de liquide et de vapeur, il est nécessaire de prendre en compte la compressibilité des différentes phases. Pour bien simuler la compressibilité une bonne estimation de la vitesse du son dans chaque phase est nécessaire.

### 2.3.3 Effets des gaz dissouts

Dans les conditions réelles, le liquide contient une proportion de gaz dissouts non condensable (qui ne correspond pas à sa propre vapeur) comme de l'air dans de l'eau. Plus la pression est élevée plus le liquide peut contenir du gaz. Cela a pour effet de réduire la contrainte nécessaire pour fracturer la masse liquide. Plus la concentration de gaz est importante et plus le liquide a tendance à caviter.

### 2.3.4 Phénomène du collapse

Lorsque la bulle de cavitation est soumise à une pression extérieure importante, elle implose. Pendant cette implosion, l'énergie potentielle stockée dans la bulle à sa taille maximale est progressivement convertie en énergie cinétique dans le milieu environnant. Cette énergie cinétique accélère le fluide pendant les étapes successives du collapse. Comme l'énergie dégagée est concentrée dans un volume de plus en plus petit, la vitesse et la pression associée au moment final de l'implosion peuvent être très élevées. La pression générée par le premier rebond du collapse est propagée dans le milieu sous forme d'onde de pression. En négligeant les effets de tension superficielle et de viscosité, et en assumant que la bulle ne contient que de la vapeur, on peut associer ce processus de collapse à un temps  $T_i$ , appelé Temps de Rayleigh ([13]).

$$T_i \cong 0.915 R_{init} \sqrt{\frac{\rho}{P_\infty - P_{sat}}} \quad (2.1)$$

Lauterborn & Ohl [28] ont effectué des expériences sur le collapse des bulles de cavitation, en utilisant une méthode de visualisation de 20.8 millions d'images à

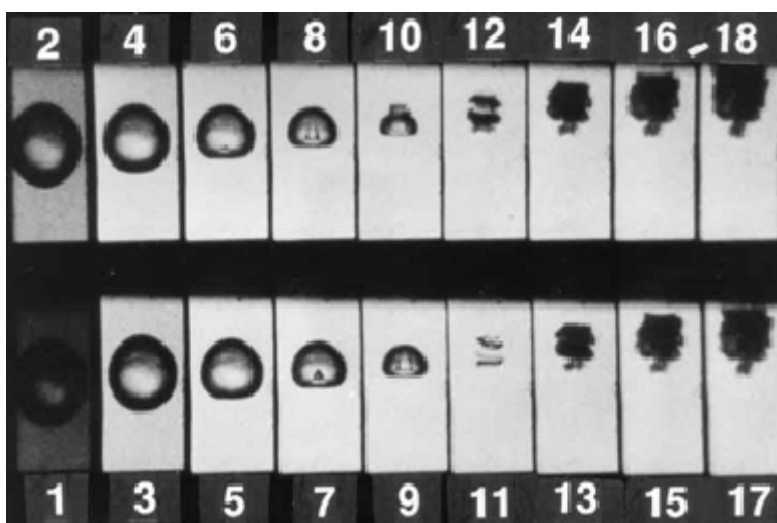


FIGURE 2.6 – Collapse d’une bulle de cavitation en écoulement libre. [6]

la seconde. On remarque que le collapse de la bulle s’effectue en un temps très court (correspondant de façon très précise au temps de Rayleigh), et qu’une onde de pression se propage au sein de l’écoulement (voir figure 2.6). Hosny & Daa [19] cite pour l’eau des surpressions très localisées lors des collapses de bulles de 500 à 1000bar, et des températures de 1000 à 5000°C à l’endroit du collapse. Pour information, on peut citer le phénomène de sono-luminescence à la fin du collapse, qui consiste en une concentration d’énergie telle, que des photons sont émis à partir de la zone ponctuelle de fin de collapse.

### 2.3.5 Mécanismes d’érosion

L’implosion d’une bulle de cavitation au voisinage d’une paroi produit un pic de pression élémentaire dont le niveau de sollicitation peut être très élevé de l’ordre de 100 méga Pa voir plus. Par ailleurs, cette sollicitation est très localisée (quelques microns à quelques centaines de microns) et très brève (quelques micro secondes). Cela est en fait dû à deux mécanismes qui sont présentés ci après :

#### 2.3.5.1 Formation d’une onde de surpression

En début d’implosion la pression dans la bulle est petite. Elle est égale à la pression de la vapeur saturante. En fin d’implosion, la pression et la température dans la bulle atteignent un niveau très élevé du fait de la forte compression. La vitesse de l’interface est tellement élevée (de l’ordre de 100 m/s) que la vapeur restante n’a pas le temps de se condenser. Ces incondensables se trouvent com-

primés à un niveau très élevé de pression qui s'oppose au mouvement centripète du liquide. Alors, la pression au voisinage immédiat de la bulle est très grande et se raccorde à la valeur imposée à l'infini, formant ainsi un front d'onde de compression. Lors du rebond, ce front d'onde se propage au sein du liquide d'une part en raidissant et d'autre part, en voyant son maximum s'atténuer.

### 2.3.5.2 Le Microjet

Ce mécanisme se produit lorsque l'implosion de la bulle se fait à proximité d'une paroi ou d'une surface libre (figures 2.7 et 2.8) cela crée une asymétrie au niveau du champs de pression entourant la bulle de vapeur ce qui provoque la pénétration du liquide sur un coté de la bulle générant ainsi un jet liquide doté d'une vitesse élevée. Le pic de pression observé est semblable à celui de l'onde de surpression et la vitesse du jet est souvent supérieure à  $100m/s$ .



FIGURE 2.7 – Photo d'une bulle en train d'imploser, début de formation du microjet [45]

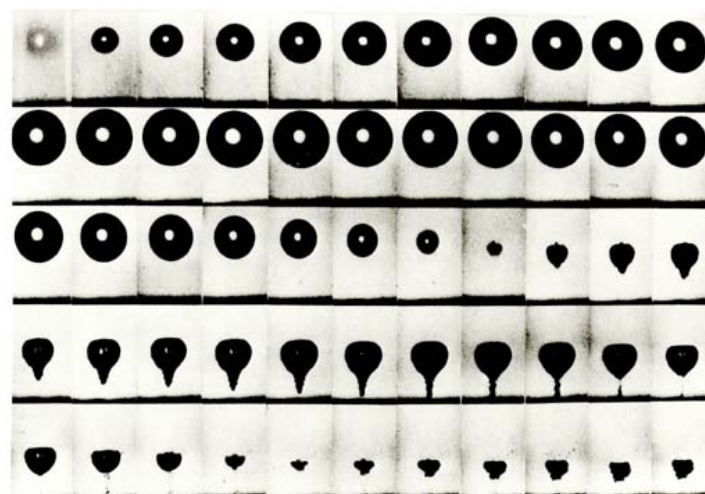


FIGURE 2.8 – Implosion d’une bulle de vapeur proche d’une paroi et générée par laser. On voit bien le microjet sur le deuxième niveau [28]

## 2.4 La tension de surface

### 2.4.1 Définition

La tension de surface est un phénomène qui a pour origine les interactions intermoléculaires d’un fluide (à l’état liquide). Sur une couche fine dont l’épaisseur est de l’ordre de quelques molécules, au niveau d’une interface (interface liquide-liquide ou liquide-gaz), la cohésion entre particules du même fluide augmente et génère une tension au niveau macroscopique. Plusieurs études ont montré que malgré sa faible intensité elle avait un effet non négligeable sur la formation des bulles de cavitation et leurs convection et implosion.

### 2.4.2 Effet de la tension de surface sur la formation des bulles de cavitation

J. P. Franc [14] a montré que dans un liquide qui contient des micro-bulles (nucléations très petites) plus la taille des bulles est petite et plus la pression qui doit générer la cavitation est basse et il a relié ce phénomène à la tension de surface. L’énergie potentielle due à la tension superficielle (l’énergie qu’il faut fournir pour créer une interface liquide-vapeur) est très importante dans les premiers instants de l’évolution d’une petite bulle. La dérivée de la surface par rapport au volume dans le cas d’une petite bulle est plus importante que celle de la grosse bulle, c’est-à-dire que la variation du diamètre d’une grosse bulle soumise à une dépression est moins brutale que celle d’une petite soumise à la même dépression.

### 2.4.3 Effets de la tension de surface sur la convection des bulles

La tension de surface a pour effet de maintenir les bulles sous une forme sphérique. Elle agit à contre sens des contraintes du fluide qui tendent à déformer les bulles en mouvement. Une analyse dimensionnelle faite par Brennen [5] montre que les distorsions se produisent pour un nombre de Weber  $W_e > 1$ . Il a été observé expérimentalement en augmentant le nombre de  $W_e$  que la première déformation qui apparaît est une bulle elliptique qui oscille en forme et pour  $W_e \approx 20$  la bulle prend la forme d'un chapeau.

### 2.4.4 Effet de la tension de surface sur le collapse de la bulle

En 1994 Kuvshinov & al. [27] ont montré qu'avec l'augmentation de la tension de surface la vitesse de l'interface liquide-vapeur augmente et le rayon minimum de la bulle de cavitation atteint lors du collapse diminue. Liu et al. [34] ont montré expérimentalement dans le cas d'une bulle générée par laser qu'une augmentation de la tension de surface est accompagnée par une diminution du temps de collapse et d'une augmentation de l'intensité du jet impactant (voir figure 2.9) et que dans le même temps l'érosion causée par le collapse augmente brutalement. Une étude réalisée par Iwai [20] en faisant varier la tension de surface de l'eau par l'ajout d'agents mouillants a montré que la diminution de la force de tension de surface engendre une diminution de l'impact du collapse (des dommages causés par le collapse). Dans la même étude, il observe aussi une corrélation entre la diminution du pic de pression atteint lors du collapse et la diminution de la tension de surface.

## 2.5 Nombres addimensionnels

### 2.5.1 Nombre de cavitation

Le nombre de cavitation  $\sigma_c$  est un nombre sans dimension qui caractérise la tendance à la formation de la cavitation dans un écoulement. Il représente le rapport entre la pression locale et la pression dynamique. Il est défini par la relation suivante :

$$\sigma_c = \frac{p - p_v}{\frac{1}{2}\rho U^2} \quad (2.2)$$

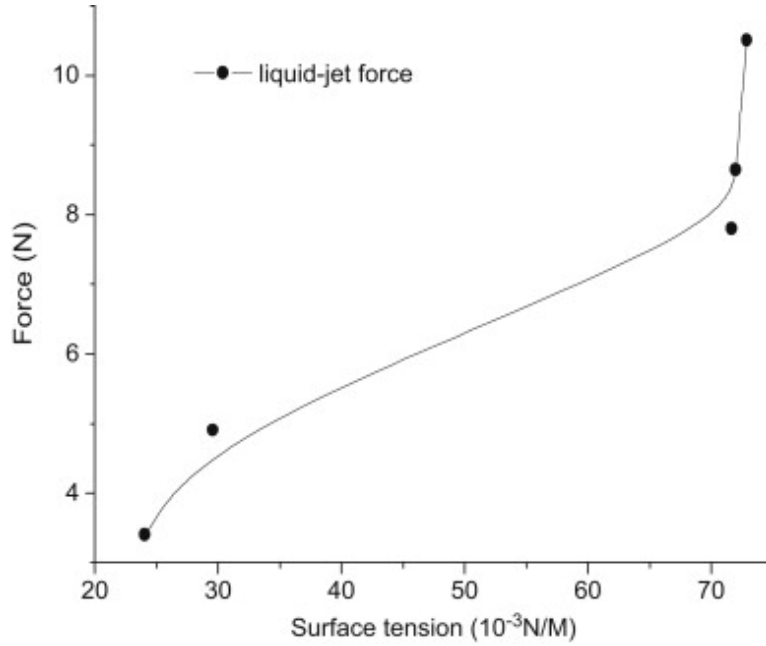


FIGURE 2.9 – Effet de la tension de surface sur la force du jet liquide [34]

où  $p_v$  représente la pression de saturation vapeur. La valeur de  $\sigma_c$  pour laquelle un écoulement cavite varie selon la géométrie qui induit une accélération et donc une dépression plus ou moins grande du liquide, et selon la composition du liquide en terme de gaz dissous.

### 2.5.2 Nombre de Weber

Le nombre de  $W_e$  est un nombre sans dimension qui représente le rapport entre la force d'inertie et la force de tension de surface. Il est défini par la formule suivante :

$$W_e = \frac{\rho U^2 L_0}{\sigma} \quad (2.3)$$

dans l'équation 2.3,  $L_0$  est une longueur caractéristique qui peut correspondre dans notre cas au rayon d'une bulle de cavitation.  $\sigma$  est la tension superficielle. Ce nombre sert en général à définir les cas où il est possible de négliger la tension de surface. On voit que lorsque la taille d'une bulle de cavitation est très petite le nombre de Weber est de l'ordre de l'unité ce qui est le cas lors de la dernière étape du collapse où il est préférable de ne pas négliger la tension de surface.

### 2.5.3 Nombre capillaire

Le nombre capillaire  $C_a$  est un nombre sans dimension. Il représente le rapport entre la force visqueuse et la tension superficielle et est utilisé pour caractériser l'atomisation des liquides. On le définit de la manière suivante :

$$C_a = \frac{U\mu}{\sigma} \quad (2.4)$$

Où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide. Nous utilisons ce nombre dans la mise en place de cas tests pour la dynamique des bulles. En utilisant un nombre capillaire faible, on s'assure de la prédominance des forces de tension de surface sur les forces visqueuses.

### 2.5.4 Nombre de Bond

Le nombre de Bond noté  $B_o$  représente le rapport entre les forces gravitationnelles et la tension de surface. lorsque  $B_o$  est inférieur à 1, la bulle de cavitation est sphérique (en l'absence de force d'inertie). Nous allons l'utiliser dans des cas tests pour valider la prise en compte de la force de gravitation. Il est défini par la relation suivante :

$$B_o = \frac{\Delta\rho g L_0^2}{\sigma} \quad (2.5)$$

où  $\Delta\rho = \rho_l - \rho_v$ ,  $g$  est l'accélération gravitationnelle et  $L_0$  une longueur caractéristique (dans notre cas le rayon d'une goutte).

### 2.5.5 Nombre de Strouhal

Le nombre de Strouhal noté  $S_t$  est obtenu en normalisant la fréquence de lâchés des structures de cavitation  $f_v$  (dans le cas de la cavitation à poche attachée) avec la vitesse de l'écoulement  $U$  et une longueur caractéristique  $L_0$  (le plus souvent c'est la corde du profil d'aile).

$$S_t = \frac{f_v L_0}{U} \quad (2.6)$$

### 2.5.6 Nombre de Mach

Le nombre de Mach  $M$  est défini comme étant le rapport entre l'amplitude de la vitesse du fluide  $||\vec{u}||$  et la vitesse du son dans ce fluide :

$$M = \frac{||\vec{u}||}{c} \quad (2.7)$$

où  $c$  est la vitesse du son dans le fluide en  $[m/s]$ .



## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné une définition de la cavitation et avons décrit les phénomènes qui accompagnent la formation des bulles de cavitation et le collapse associé. Nous avons insisté sur l'effet de la tension de surface et avons cité quelques études sur cet aspect qui ont montré l'intérêt de sa prise en compte que ce soit lors du collapse ou de la formation de la cavitation. Nous avons insisté sur le collapse et ses conséquences car il constitue une partie importante de la thèse. Dans le chapitre suivant nous allons aborder la question de la modélisation de la cavitation et surtout de la prise en compte de la tension de surface.

# Modélisation de la cavitation

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>21</b>
3.1.1	Modèles à deux fluides	22
3.1.2	Modèles à un fluide	22
3.1.3	Modèle à particules	23
<b>3.2</b>	<b>Le Modèle d'équilibre homogène</b>	<b>24</b>
3.2.1	Introduction	24
3.2.2	Définition	24
3.2.3	Hypothèses de base	24
3.2.4	Les avantages du modèle d'équilibre homogène	25
<b>3.3</b>	<b>Système d'équations pour le modèle d'équilibre homogène</b>	<b>26</b>
3.3.1	Équations de conservation	26
3.3.2	Procédure de calcul des variables primitives	27
3.3.3	Algorithme de transition de phase	27
3.3.4	Équations d'état	28
3.3.5	Prise en compte de la gravité	34
<b>3.4</b>	<b>Prise en compte de la tension de surface</b>	<b>36</b>
3.4.1	Modèle direct	36
3.4.2	Modèle indirect	37
3.4.3	Le calcul du coefficient capillaire $\lambda$	39
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>43</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons une classification des modèles simulant les écoulements multiphasiques et nous insisterons sur les modèles de cavitation en expliquant brièvement ce qui les distingue les uns des autres. Cela permettra de situer le modèle de cavitation choisi et d'expliquer qu'elles sont les raisons

de notre choix. Nous présentons dans le détail, le modèle de tension de surface, le développement des équations de conservation et les équations d'état pour les différentes phases.

### 3.1.1 Modèles à deux fluides

Le principe de base de ces modèles est de considérer les phases, vapeur et liquide, comme deux phases distinctes et non miscibles. Nous pouvons considérer une troisième espèce si en plus du liquide et de la vapeur on prend en considération les micro-bulles de gaz non condensable. On y considère deux ensembles d'équations de transport de masse, de quantité de mouvement et de chaleur pour décrire l'écoulement des deux fluides (liquide et vapeur). Les interactions entre les deux phases sont modélisées par des échanges de masse, de quantité de mouvement et d'énergie moyennant des termes sources dans les équations de conservation. Les deux fluides sont séparés par une interface discrète au travers de laquelle il subsiste un saut de température, de vitesse et de pression due à l'existence de deux ensembles d'équations de conservation. Tous ces aspects rendent nécessaire de supposer le non équilibre thermodynamique.

Ces modèles posent de nombreuses difficultés numériques. On peut citer la non hyperbolicité des équations qui complique la tâche du programmeur et le coût de calcul qui augmente jusqu'à devenir exorbitant dans le cas de l'interaction entre une onde de choc et l'interface liquide-vapeur. Sans oublier la nécessité d'incorporer un algorithme pour traquer l'interface.

Cette démarche est rarement utilisé pour simuler les écoulements cavitants. Ils peuvent néanmoins être utilisé pour simuler le comportement d'une bulle isolée (collapse d'une bulle de vapeur).

### 3.1.2 Modèles à un fluide

Ce type de modèle est généralement utilisé pour simuler les nuages et poches de cavitation. Dans ces modèles, on considère un seul ensemble d'équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie pour tout le domaine de calcul. Le fluide est considéré comme un mélange de phases et ses propriétés physiques sont moyennées en utilisant une fraction volumique de la phase vapeur qui est calculée à partir de la densité. On considère dans le fluide (le mélange homogène) que les phases liquide et vapeur qui le constituent se partagent une même vitesse, une même pression et température. Comme conséquence directe, les grandeurs de l'écoulement varient de manière continue a travers une interface liquide-vapeur diffuse. Dans la familles des modèles à un fluides on

retrouve les modèles :

- Les modèles basées sur le transport de la fraction volumique où le transfert de masse et de chaleur sont modélisés par des termes sources. Parmi ces modèles on peut citer le travail de Kubota [26] où le terme source de transfert de masse est basé sur la dérivation des équations simplifiées de Rayleigh Plesset. Le modèle de Singhal [44] prend en compte la formation et le transport des bulles de vapeur, les fluctuations turbulentes de la pression et de la vitesse et les effets du gaz non condensable dissout dans le liquide, le taux de changement de phase est dérivé d'une forme réduite des équations de la dynamique des bulles de Rayleigh Plesset.

- Le modèle d'équilibre homogène (HEM). On peut citer quelques exemples comme le travail de Koop [24] qui a utilisé le modèle homogène d'équilibre pour la simulation d'un nuage de cavitation en 3d prenant en compte le changement de phase. La thèse de Diehl [12] qui présente un schéma volumes finis d'ordre élevé avec la méthode Galerkin Discontinu pour résoudre les équations de Navier Stokes et Korteweg avec l'hypothèse de l'équilibre homogène.

- Le modèle homogène de relaxation qui prend en compte le non équilibre thermodynamique en introduisant un temps caractéristiques. On peut citer le travail de Gopalakrishnan et Schmidt [43] qui utilisent un modèle HRM pour simuler le Flash-Boiling au niveau de l'injecteur dans une tuyère divergente.

- Le modèle barotrop ou la pression dans le mélange varie en fonction de masse volumique. Le modèle de Delannoy et Kueny [11] qui propose une loi de forme sinusoïdale.

### 3.1.3 Modèle à particules

On considère un nombre fini de particules (dans le cas de la cavitation ce sont des bulles de vapeur) qui baignent dans un liquide continu. Les forces qui s'appliquent sur ces particules englobent : la traînée, la portance ainsi que leurs moments. Ces forces affectent la trajectoire des particules. Ces hypothèses permettent de déterminer l'interaction particule-particule. Il est possible de connaître l'historique de la température dans les bulles en modélisant le transfert de masse. On retrouve rarement ce genre de modèle dans la littérature qui se limitent souvent à des écoulements incompressibles (les vapeurs sont incompressibles) avec une proportion de vapeur faible.

## 3.2 Le Modèle d'équilibre homogène

### 3.2.1 Introduction

Dans cette section, nous présentons le modèle d'équilibre homogène ( HEM ) pour les écoulements diphasiques. Pour plus de détails, il est suggéré de consulter l'article de référence de Wendroff [7]. Il fait parti des modèles à un fluide. Nous insistons sur les principales hypothèses du modèle ainsi que des conditions de sa validité.

### 3.2.2 Définition

C'est un modèle de cavitation à interface diffuse. On considère que le fluide contient une phase unique, qui est homogène. Cette phase est un mélange entre les phases réelles liquide et vapeur. Chacune de ces phases pures doit être décrite par une équation d'état adaptée. Le modèle renvoie une estimation de la masse volumique du mélange, à partir de laquelle une fraction volumique de vapeur est obtenue. Ce modèle de cavitation a été utilisé dans la première version du code de S. Khelladi (FV-MLS) pour le modèle de cavitation développé par Bergerat [3] dans le cadre de sa thèse de doctorat.

### 3.2.3 Hypothèses de base

La principale hypothèse de ce modèle est que l'équilibre mécanique thermodynamique est atteint quasi instantanément. Cela implique ce qui suit :

- L'interface entre le liquide et la vapeur a une certaine épaisseur ce qui permet aux grandeurs physiques de varier de manière continue.
- L'équilibre mécanique permet de dire que les vitesses entre le liquide et la vapeur dans la phase mélange sont homogénéisés. En d'autre termes, il n'y a pas de glissement entre les deux phases. Il y a un paramètre addimensionnel qui permet de dire que cette hypothèse est valide ou non. C'est le nombre d'Atwood exprimé dans l'équation 3.1. L'hypothèse est d'autant plus vérifiée quand  $\rho_v \ll \rho_l$ , ce qui donne une valeur de  $At$  proche de 1.

$$At = \frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l + \rho_v} \quad (3.1)$$

- Les températures du liquide et de la vapeur dans la phase mélange sont égales. Cela signifie qu'on considère le temps caractéristique pour atteindre l'équilibre thermodynamique très petit devant le temps caractéristique de l'écoulement. Cela peut être estimé par le nombre de Fourier :

$$Fo = \frac{t_c}{L^2/D} \quad (3.2)$$

Où  $t_c$  est le temps caractéristique de l'écoulement.  $L$  une longueur caractéristique et  $D$  est le coefficient de diffusion thermique du fluide.

Il est particulièrement bien adapté à la simulation des écoulements à bulles dispersées.

Les faiblesses de ce modèle sont bien connus : Il ne peut pas reproduire une forte cinétique ou effets du non-équilibre thermodynamique comme c'est le cas, par exemple, dans les écoulements annulaires ou un écoulement de gaz chargé en gouttelettes. Lorsque les effets de non-équilibre sont petits, ils peuvent être pris en compte par des termes de correction (modèles des flux de vitesse dérivées, modèles d'ébullition métastable). Quand ils sont plus importants, des équations supplémentaires sont nécessaires pour une prévision précise. D'autres solutions existent pour étendre le domaine d'application de ce modèle comme élargir artificiellement l'épaisseur de l'interface comme le fait Jamet [21] ou le coupler avec un modèle de sous relaxation comme dans l'article de Cugliandolo [10].

### 3.2.4 Les avantages du modèle d'équilibre homogène

- Il n'est pas nécessaire d'avoir des conditions additionnelles de saut dues à la discontinuité comme c'est le cas dans les modèles à interface discrète.

- Il n'est pas nécessaire de traquer la surface comme c'est le cas dans les modèles à suivi d'interface.

- les équilibres dynamique et thermique des deux phases sont pris dans le même maillage de calcul, et seule les équations de conservation du mélange sont considérées (la phase est déterminée à partir de la valeur de la densité obtenue de l'équation d'état).

- Une relative facilité dans l'implémentation du modèle.

- Sous certaines conditions l'hypothèse d'une interface discrète n'est pas valable d'où la nécessité d'utiliser un modèle à interface diffuse. Comme c'est le cas juste au dessous du point critique.

- Dans le cas de la coalescence de deux bulles il n'est pas nécessaire de modéliser le comportement des deux interfaces, de même dans le cas de la formation d'une bulle de cavitation à partir de la phase liquide. Ce processus est continu et ne peut être modélisé que par un domaine continu.

### 3.3 Système d'équations pour le modèle d'équilibre homogène

Dans le modèle HEM on considère que la pression et la température dans un volume fluide sont les mêmes pour le liquide et sa vapeur. On y considère aussi une densité équivalente qui est définie par la relation 3.3. Les équations de conservation sont définies de la même manière que pour un seul fluide. Elle sont explicitées dans cette section en deux dimensions. Pour la fermeture du système d'équations de transport, on peut utiliser différentes équations d'état. On en a sélectionné quelques unes dans la section 3.3.

$$\rho = \alpha \rho_{v,sat}(T) + (1 - \alpha) \rho_{l,sat}(T) \quad (3.3)$$

#### 3.3.1 Équations de conservation

On définit les équations de conservation de la masse 3.4 de la quantité de mouvement 3.5 et de l'énergie 3.6 comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}} + S_G + S_{TS} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\rho E + p) \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + S_{E_G} + S_{E_{TS}} \quad (3.6)$$

où en 2d le tenseur des contrainte  $\tau$  est défini par la relation suivante :

$$\bar{\bar{\tau}} = \mu \left[ \left( \vec{\nabla} \otimes \vec{V} \right) + \left( \vec{\nabla} \otimes \vec{V} \right)^t \right] - \frac{2\mu}{3} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) \bar{\bar{I}} \quad (3.7)$$

Quand au flux de chaleur  $\vec{q}$ , il est défini par la loi de Fourier en fonction du gradient de température et de la conductivité thermique  $k$  :

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad (3.8)$$

La densité d'énergie totale  $E$  est définie par la relation suivante :

$$E = e + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (3.9)$$

où  $e$  est la densité d'énergie interne.

$S_G$  et  $SE_G$  : sont les termes sources relatifs à la force de gravitation qu'on définira dans la section 3.3.5.

$S_{TS}$  et  $SE_{TS}$  : sont les termes sources relatifs à la force de tension de surface qu'on définira dans la section 3.4.

Dans les calculs d'application pour fermer ce système d'équations on utilise les équations d'état définies dans la section 3.3.4.4.

### 3.3.2 Procédure de calcul des variables primitives

Dans une itération temporelle, on réalise deux étapes successives. La première consiste à mettre à jours les variables conservatives  $U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)$  en résolvant le système d'équation (3.4-3.6). La deuxième consiste quand à elle au calcul de la pression, de la température et de la fraction vapeur en utilisant les équations d'état à travers l'algorithme de transition de phase 3.3.3.

### 3.3.3 Algorithme de transition de phase

Cet algorithme est subdivisé en deux étapes.

#### 3.3.3.1 Calcul de la température d'équilibre

Dans cette étape, on détermine la température correspondant à la densité et à l'énergie interne calculées lors de la résolution du système d'équations de conservation. Cette procédure est itérative car la température intervient dans le calcul des densités de saturation liquide et vapeur. On commence par choisir une température de départ notée  $T_{start} = T^n$ . On entre ensuite dans une boucle itérative qui fait ceci :

- Si  $\rho < \rho_{v,sat}(T)$  la nouvelle valeur de la température est calculée grâce à la formule 3.29.

- Si  $\rho > \rho_{l,sat}(T)$  la nouvelle valeur de la température est calculée grâce à la formule 3.31.

- Si  $\rho_{v,sat}(T) < \rho < \rho_{l,sat}(T)$  la nouvelle valeur de la température est calculée grâce à la formule 3.33. Dans ce cas on obtient une équation non linéaire qu'on résout de deux manières différentes (voir annexe A).

On sort de la boucle quand la différence entre deux valeurs successives de température est inférieure à un epsilon choisi.



### 3.3.3.2 Détermination de la pression et de la fraction volumique

Une fois la température connue, on calcule les densités de saturation liquide et vapeur.

-Si  $\rho < \rho_{v,sat}(T)$  la pression est calculée grâce à la formule 3.28. Et la fraction volumique de vapeur  $\alpha = 1$ .

-Si  $\rho > \rho_{l,sat}(T)$  la pression est calculée grâce à la formule 3.31. Et la fraction volumique de vapeur  $\alpha = 0$ .

-Si  $\rho_{v,sat}(T) < \rho < \rho_{l,sat}(T)$  la pression est constante et égale à la pression de saturation. La fraction volumique de vapeur est déterminée grâce à la formule 3.34

### 3.3.4 Équations d'état

#### 3.3.4.1 Équation des gaz raides

La loi d'état calorique  $p = p(\rho, e)$ , sous l'approximation "Stiffened Gas", peut être écrite sous la forme suivante :

$$p(\rho, e, \alpha) = (\gamma(\alpha) - 1) \rho (e - q(\alpha)) - \gamma(\alpha) P_\infty(\alpha) \quad (3.10)$$

On peut écrire la pression en fonction de la température et de la masse volumique comme suit

$$p(\rho, T) = (\gamma - 1) C_v T \rho + K(\rho) \quad (3.11)$$

Cette formule est obtenue en utilisant les lois de Maxwell ([29]).

$K$  est une fonction de la masse volumique uniquement. Pour éviter des états non physiques, comme une vitesse du son au carré négative,  $K$  est prise égale à  $P_\infty$ . On remarque dans l'équation 3.10 que les paramètres  $\gamma$ ,  $q$  et  $P_\infty$  dépendent de la phase considérée. De même que pour l'équation 3.11 où la capacité calorifique à volume constant  $C_v$  dépend de la phase. Dans le cas d'un fluide et sa vapeur ces paramètres sont déterminés en utilisant les courbes expérimentales de saturation. A chaque valeur de la température correspond une unique pression appelée pression de vapeur saturante. Dans la référence [17], pour l'eau on obtient les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} p_{\infty,l} &= 10^9 \text{ Pa}, P_{\infty,v} = 0 \\ C_{v,l} &= 1816 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}, C_{v,v} = 1040 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} \\ \gamma_l &= 2.35, \gamma_v = 1.43 \\ q_l &= -1167 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1}, q_v = 2030 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1} \end{aligned}$$

Pour la phase mélange on peut calculer ces paramètres en fonction de la fraction volumique de vapeur  $\alpha$  qui est définie comme suit :

$$\alpha = \frac{\rho e - \rho_l^{sat} e_l^{sat}}{\rho_v^{sat} e_v^{sat} - \rho_l^{sat} e_l^{sat}} \quad (3.12)$$

On définit des formules à partir de  $\alpha$  pour le calcul des différents paramètres :

$$\rho q(\alpha) = \alpha \rho_v q_v + (1 - \alpha) \rho_l q_l \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{\gamma(\alpha) - 1} = \frac{\alpha}{\gamma_v - 1} + \frac{1 - \alpha}{\gamma_l - 1} \quad (3.14)$$

$$p_\infty(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha) - 1}{\gamma(\alpha)} \left[ \alpha \frac{\gamma_v}{\gamma_v - 1} p_{\infty,v} + (1 - \alpha) \frac{\gamma_l}{\gamma_l - 1} p_{\infty,l} \right] \quad (3.15)$$

### 3.3.4.2 Équation d'état de Van Der Waals

Nous allons présenter dans cette section la forme générale des équations de Van der Waals. En se basant sur l'énergie libre de Helmotz, on définit les quantités thermodynamiques en utilisant les formules suivantes :

$$e(T, \rho) = f(T, \rho) - T \frac{\partial f(T, \rho)}{\partial T} \quad (3.16)$$

$$s(T, \rho) = - \frac{\partial f(T, \rho)}{\partial T} \quad (3.17)$$

$$p(T, \rho) = \rho^2 \frac{\partial f(T, \rho)}{\partial \rho} \quad (3.18)$$

Dans l'équation 3.19 on présente l'énergie libre de Helmotz pour un fluide de van der Waals et les expressions des grandeurs thermodynamiques . Ces résultats sont tirés de la thèse de Diehl [12]

$$f(T, \rho) = -\mathbf{a}\rho + \mathbf{k}T \log \left( \frac{\rho}{\mathbf{b} - \rho} \right) - \mathbf{c}T \log \left( \frac{T}{T_0} \right) - \mathbf{d}T + cte \quad (3.19)$$

$$e(T, \rho) = -\mathbf{a}\rho + \mathbf{c}T + cte \quad (3.20)$$

$$s(T, \rho) = -\mathbf{k} \log \left( \frac{\rho}{\mathbf{b} - \rho} \right) + \mathbf{c} \log \left( \frac{T}{T_0} \right) + \mathbf{d} \quad (3.21)$$

$$p(T, \rho) = \mathbf{k}\mathbf{b} \frac{\rho T}{\mathbf{b} - \rho} - \mathbf{a}\rho^2 \quad (3.22)$$

Les constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  varient en fonction du fluide et peuvent être calculées en fonction des valeurs des température, densité et pression critiques (ces données sont disponibles dans la référence [12]). Pour l'eau on a :

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{8ab}{27k} = 647.096K \\ p_c &= \frac{ab^2}{27} = 22.064 \cdot 10^6 Pa \\ \rho_c &= b/3 = 322kg/m^3 \end{aligned}$$

Ce qui donne les valeurs suivantes pour les coefficients :  $a = 640.02m^5/kg s^2$ ,  $b = 966kg/m^3$ ,  $k = 283.07m^2/K s^2$ ,  $d = c_v$ . On prend  $c = -d$  comme c'est le cas dans la thèse de Diehl [12].

### Vitesse du son pour un fluide de Van Der Waals

La vitesse du son est calculée en dérivant la pression par rapport à la densité :

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad (3.23)$$

ce qui donne :

$$c^2 = \frac{kTb^2}{(b - \rho)^2} - 2a\rho \quad (3.24)$$

la vitesse du son est donnée par :

$$c = \sqrt{\frac{kTb^2}{(b - \rho)^2} - 2a\rho} \quad (3.25)$$

Dans la zone  $(A, B)$  dans la figure 3.2 la pression augmente avec la diminution de la densité ce qui implique une vitesse du son imaginaire (voir figure 3.1). La solution proposée est de limiter la valeur de la vitesse du son à  $1m/s$ .

### Difficulté Numérique

L'équation de Van Der Waals est largement utilisée dans les écoulements de type liquide-vapeur. Des études antérieures réfèrent à une difficulté numérique (forte instabilité) liée à l'évolution de la pression en fonction de la densité. Dans la zone AB de la figure 3.2 qui correspond à l'interface liquide-vapeur, la pression augmente alors que la densité diminue. L'état du fluide dégénère très rapidement en un mélange de phase liquide et vapeur. La solution proposée par Liu & Gomez [33] est d'inclure dans les équations de Navier Stokes et Korteweg un terme régularisant sous forme d'opérateur différentielle appliqué à la densité.

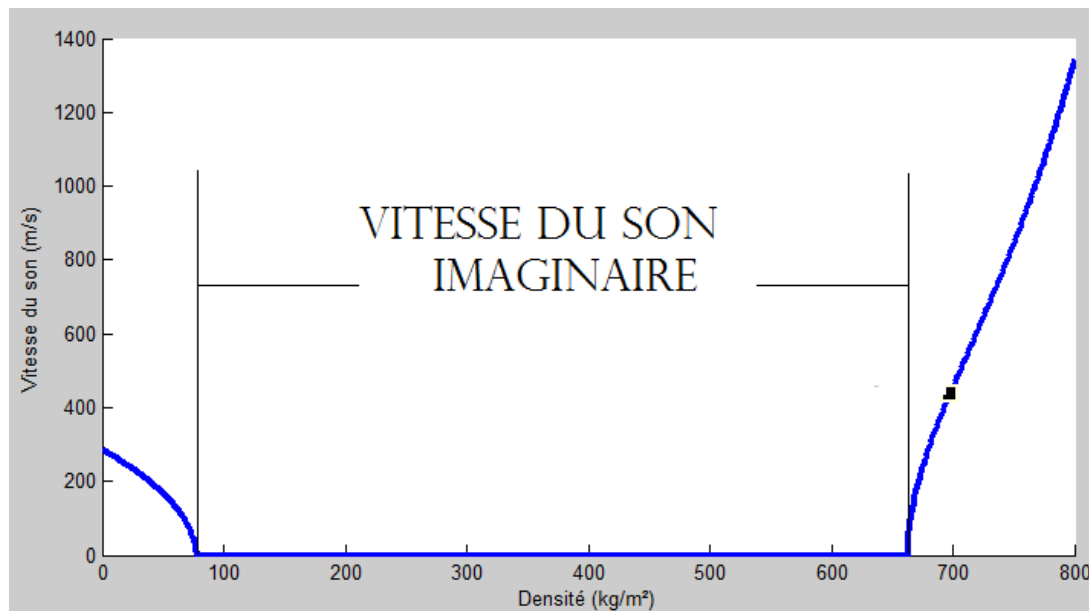


FIGURE 3.1 – Vitesse du son calculée pour un fluide de Van Der Waals à  $T = 295K$

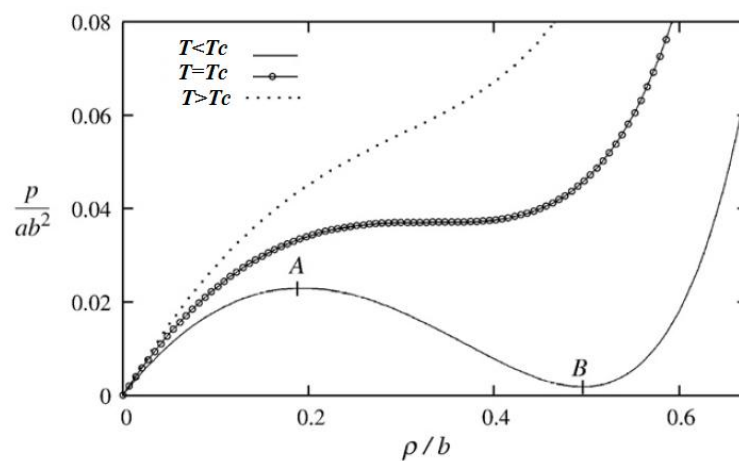


FIGURE 3.2 – Variation de la pression en fonction de la masse volumique avec une formulation de Van Der Waals

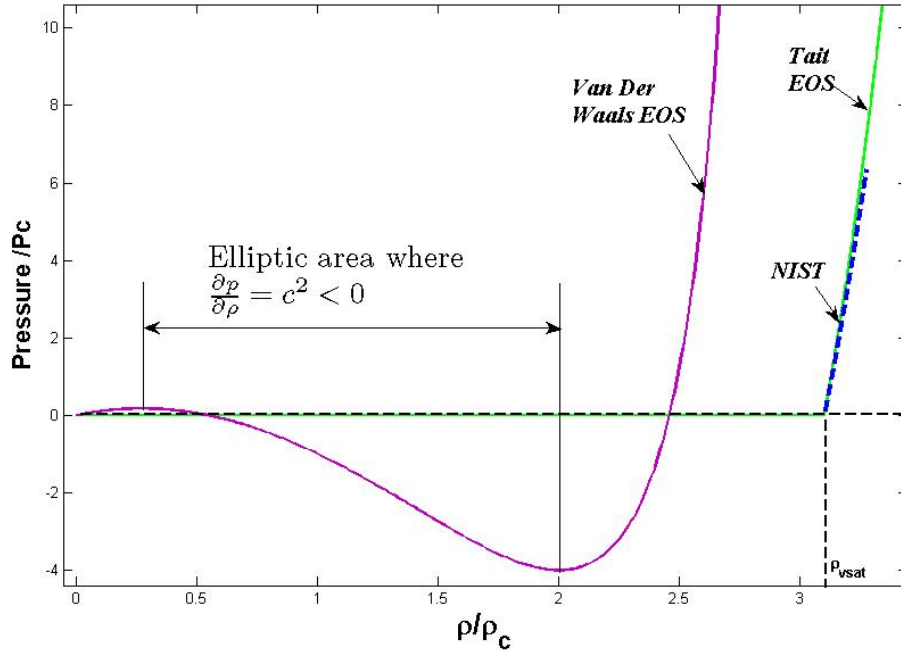


FIGURE 3.3 – L'équation d'état de Van Der Waals et l'équation d'état de Tait modifiée pour une température de 295K

### 3.3.4.3 Équation de VDW addimensionnelle

Pour reproduire certains cas tests afin de valider le code de calcul nous avons été amenés à utiliser la version addimensionnelle des équations de Van Der Waals. Nous avons réalisé l'addimensionnement par rapport aux mêmes grandeurs utilisées dans l'article de H. Gomez [16]. Les distances sont addimensionnées par rapport l'échelle de longueur  $L_0$  qui représente la longueur du domaine de calcul, la masse par  $bL_0^3$ , la température par la température critique  $T_c$  et le temps par  $L_0/\sqrt{ab}$ . On obtient l'expression suivante pour la pression :

$$\check{p} = \frac{8\check{T}\check{\rho}}{27(1 - \check{\rho})} - \check{\rho}^2 \quad (3.26)$$

Où  $\check{p}, \check{T}$  et  $\check{\rho}$  sont respectivement la pression, la température et la densité addimensionnelles.

La vitesse du son addimensionnelle est donnée par la formule suivante :

$$\check{c} = \sqrt{\frac{8\check{T}}{27(1 - \check{\rho})^2} - 2\check{\rho}} \quad (3.27)$$

### 3.3.4.4 Equation d'état du modèle homogène

Dans ce cas on utilise une équation différente pour chaque phase et une troisième équation pour la phase mélange.

#### Équation d'état de la phase vapeur

$$p_v = (\gamma_v - 1)\rho_v e_v \quad (3.28)$$

où :  $\gamma_v = 1.32$  est le rapport des capacités thermiques pour la vapeur,

$e_v = C_{vv}(T_v - T_0) + L_v(T_0) + e_{l0}$  représente l'énergie interne de la vapeur.

$L_v(T_0) = 2.75310^6 Jkg^{-1}K^{-1}$  : la chaleur latente de vaporisation,

$e_{l0} = 617 Jkg^{-1}$  : l'énergie interne de vaporisation à la température de référence  $T_0 = 273.15K$

$C_{vv} = 1410.8 Jkg^{-1}K^{-1}$  : le coefficient de chaleur spécifique à volume constant.

On combinant les relations pour la pression et l'énergie il est possible d'obtenir une formule pour le calcul de la température :

$$T_v = \frac{e_v - e_{l0} - L_v(T_0)}{C_{vv}} + T_0 \quad (3.29)$$

#### Équation d'état de la phase liquide

Pour la phase liquide, nous choisissons de fermer le système d'équations avec la loi de Tait modifiée qui permet une très bonne estimation de la pression dans le spectre de température correspondants aux applications qu'on cherche à simuler. C'est ce qui est illustré sur la figure 3.3 où l'on voit une superposition entre la courbe de la Loi de Tait modifiée en vert et la courbe donnée par la base de données standard de référence NIST, en pointillé, pour une température de 295 K. La pression est ainsi reliée à la température par :

$$p_l = K_0 \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_{l,sat}(T)} \right)^N - 1 \right] + P_{sat}(T_l) \quad (3.30)$$

$K_0$  et  $N$  sont des constantes dépendantes du fluide en question. Pour l'eau,  $K_0 = 3.310^8 Pa$ , et  $N = 7.15$ . Cette équation permet de considérer un état pur comme étant la composante saturée d'un écoulement multiphasique. L'énergie interne est donnée par la formule suivante :

$$e_l = C_{vl}(T_l - T_0) + e_{l0}.$$

où le coefficient de chaleur spécifique à volume constant de l'eau liquide  $C_{vl}$  à pour valeur  $4180 J kg^{-1} K^{-1}$ .

La température peut être exprimée par la formule suivante :

$$T_l = \frac{e_l - e_{l0}}{C_{vl}} - T_0 \quad (3.31)$$

### Équation d'état de la phase mélange

Dans le modèle de mélange homogène, la phase de mélange considère les deux phases en présence comme étant à l'équilibre thermodynamique. La pression de la phase de mélange est considérée comme étant égale à la pression de saturation :

$$p = p_{sat}(T) \quad (3.32)$$

L'équation de l'énergie du mélange est déterminée par la moyenne pondérée selon la fraction volumique de vapeur en regard des énergies internes de chacune de leur phase correspondante :

$$\rho e = \alpha \rho_{v,sat}(T) e_v(T) + (1 - \alpha) \rho_{l,sat}(T) e_l(T) \quad (3.33)$$

où

$$\alpha = \frac{\rho - \rho_{l,sat}(T)}{\rho_{v,sat}(T) - \rho_{l,sat}(T)} \quad (3.34)$$

Le reste des paramètres sont résumés dans les tableaux [3.1](#)

### 3.3.5 Prise en compte de la gravité

La force de gravitation est une force volumique due à l'attraction qu'exerce la terre sur les objets qui l'occupent. Dans les écoulements liquide-vapeur, la force de gravitation ne peut être négligée devant les efforts hydrodynamiques dans le cas où la différence de densité entre la phase liquide et vapeur est assez grande. Elle a un effet sur la trajectoire des bulles de cavitation, mais elle agit aussi comme force de déformation quand elle est associée à la viscosité. Elle vient s'opposer à la force de tension de surface qui elle tend à garder la bulle sphérique (ce phénomène est caractérisé par le nombre de Bond voir chapitre 1). Elle crée un gradient de pression dans le liquide et lorsque la bulle de cavitation est assez grande, ce gradient tend à la rendre asymétrique. On prend en compte la force de gravitation via des termes sources qu'on ajoute à l'équation de conservation de la quantité de mouvement et dans l'équation de conservation de l'énergie.

**Tableau 3.1** La pression, l'énergie, la viscosité et la vitesse du son pour les phases liquide, vapeur et mélange.

Liquide	
Pression	$p_l = K_0 \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_{l,sat}(T)} \right)^N - 1 \right] + P_{sat}(T_l)$
Énergie interne	$e_l = C_{vl}(T_l - T_0) + e_{l0}$
Viscosité	$\mu_l = A \cdot 10^{B/T_l - C}$
Vitesse du son	$c_0^2 = (N(p - p_{sat}(T) + K_0) / \rho + p / (\rho^2 C_{vl}) [\partial p_{sat}(T) / \partial T - (\partial \rho_{l,sat}(T) / \partial T) (N(p - p_{sat}(T) + K_0) / \rho_{l,sat}(T))]$

Vapeur	
Pression	$p_v = (\gamma_v - 1)\rho_v e_v$
Énergie interne	$e_v = C_{vv}(T_v - T_0) + L_v(T_0) + e_{l0}$
viscosité	$\mu_v = \mu_0 \left( \frac{T_v}{T_0} \right)^{\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{T_0 + s}{T_v + s}$
Vitesse du son	$c_v = \sqrt{\gamma_v R_v T_v}$

Mélange	
Pression	$p = p_{sat}(T)$
Énergie interne	$\rho e = \alpha \rho_{v,sat}(T) e_v(T) + (1 - \alpha) \rho_{l,sat}(T) e_l(T)$
Viscosité	$\mu_m = \alpha \mu_v + (1 - \alpha) \mu_l$
Vitesse du son	$1/\rho c_m^2 = \alpha / (\rho_{v,sat}(T) c_v^2) + (1 - \alpha) / (\rho_{l,sat}(T) c_l^2)$

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \vec{\nabla} p = \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{g} + S_{TS} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\rho E + p) \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \vec{g} \cdot \vec{V} + S E_{TS} \quad (3.36)$$

Les termes sources de gravitation sont définis comme suit

$$S_G = \rho \vec{g} \quad (3.37)$$

$$S E_G = \rho \vec{g} \cdot \vec{V} \quad (3.38)$$

## Remarque

Dans les calculs que nous allons présenter en ce qui concerne la prise en compte de la force de gravitation nous nous limitons au cas isotherme.



### 3.4 Prise en compte de la tension de surface

Il existe dans la littérature une multitude de modèles de tension de surface. Certains de ces modèles prennent en compte de manière explicite ses effets par le calcul des forces capillaires qui sont fonction de la tension de surface et de la courbure de l'interface liquide-vapeur. D'autres modèles incluent ses effets implicitement dans le tenseur des contraintes. Ils font intervenir une dérivée troisième de la masse volumique et, indirectement, la tension de surface et l'épaisseur de l'interface liquide-vapeur. On a choisi un modèle de chacune des deux catégories précédentes. Le premier est le modèle de gradient de couleur développé par Brackbill [4], et le second modèle prend en compte la tension de surface à travers le tenseur de Korteweg.

#### 3.4.1 Modèle direct

Cette méthode se base sur l'utilisation des équations de Navier-Stokes incluant les forces capillaires qui sont des forces surfaciques s'appliquant uniquement et perpendiculairement à l'interface liquide-vapeur. Comme le montre l'équation 3.39 les forces capillaires sont fonction de la tension de surface  $\sigma$  et de la courbure de l'interface liquide-vapeur.

$$\vec{F}_\sigma = \sigma \kappa \vec{n}_{LV} \quad (3.39)$$

Dans notre cas l'interface liquide-vapeur est diffuse et comporte une certaine épaisseur. Cela pose deux problèmes : le calcul de la courbure  $\kappa$  et de la normale  $\vec{n}_{LV}$ . Brackbill [4] propose une méthode pour y remédier. Cette méthode est basée sur l'utilisation d'une grandeur physique qui prend une valeur fixe pour le liquide et une autre valeur pour la vapeur et qui varie graduellement entre ces deux valeurs dans l'interface. Dans son étude, Brackbill a utilisé la masse volumique. Nous avons utilisé une grandeur adimensionnelle qui est la fraction volumique de vapeur  $\alpha$ .

$$\vec{n}_{LV} = \nabla \alpha \quad (3.40)$$

$$\kappa = -\nabla \cdot \vec{n}_{LV} \quad (3.41)$$

Nous prenons  $\alpha$  égal à 0 dans le liquide et 1 dans la phase vapeur. Sachant cela et d'après l'équation (3.40) qui définit la normale en fonction de la fraction de vapeur, la normale à l'interface (liquide-vapeur) doit être toujours dirigée du liquide vers la vapeur. Si l'on se place du côté de la vapeur cette normale est

toujours entrante. La direction de la force capillaire est portée par l'axe de la normale  $\mathbf{n}$  mais dépend du signe de la courbure  $\kappa$ . Si  $\kappa$  est positive l'interface est convexe par rapport au liquide et concave par rapport à la vapeur. Donc, la force est dirigée de la vapeur vers le liquide et vice versa dans le cas où  $\kappa$  est négative.

Cette méthode est facile à mettre en œuvre mais elle présente un grand inconvénient. Plus l'épaisseur de la zone de mélange est grande et moins la courbure calculée est précise. D'où la nécessité d'avoir un maillage assez fin, du moins autour de l'interface.

Une autre piste est à explorer concernant l'ajout des forces capillaires. Dans la littérature, elles apparaissent souvent comme étant une condition aux limites sur l'interface liquide-vapeur. Concrètement, on impose un saut de pression à l'interface qui est égale à  $\sigma\kappa$ . Une façon de faire consiste à rajouter directement ce terme dans l'expression de la pression.

### 3.4.2 Modèle indirect

Ce modèle consiste à ajouter aux équations de quantité de mouvement la divergence du tenseur de Korteweg qui est défini dans l'équation 3.42

$$K = \lambda \left[ \left( \rho \Delta \rho + \frac{1}{2} |\nabla \rho|^2 \right) \mathbf{I} - \nabla \rho \nabla \rho^T \right] \quad (3.42)$$

$\lambda$  désigne le coefficient de capillarité. C'est un paramètre qui augmente proportionnellement avec la tension de surface  $\sigma$ . Il dépend aussi de l'épaisseur de l'interface liquide vapeur. Dans un premier temps on ne considère que sa dépendance par rapport à  $\sigma$ .

Pour le calcul des dérivées partielles de  $\rho$ , on utilise la reconstruction MLS qui est expliquée dans la section 4.4.

On se retrouve à résoudre le système d'équation suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \vec{\nabla} p(\rho) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\tau} + K) \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \check{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\check{E} + p) \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot ((\vec{\tau} + K) \vec{V}) - \vec{\nabla} \cdot \hat{q}_E \quad (3.45)$$

Où  $\check{E}$  représente l'énergie totale étendue. Elle est définie par Diehl [12] dans l'équation 3.46.

$$\tilde{E} = \rho \left( e(T, \rho) + \frac{1}{2} |\vec{V}|^2 \right) + \frac{\lambda}{2} |\vec{\nabla} \rho|^2 \quad (3.46)$$

$$\hat{q}_E = \rho^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \frac{\lambda}{\rho} \vec{\nabla} \rho - \kappa \vec{\nabla} T \quad (3.47)$$

Le système NSK comporte un terme additionnel dans le tenseur de contraintes qui décrit les forces qui agissent à l'interface liquide-vapeur. Les effets de transfert thermique à travers l'interface apparaissent dans la modification de l'équation de conservation de l'énergie sachant que  $e = e(T, \rho)$ ,  $p = p(T, \rho)$  et  $\vec{\nabla} q_E(T, \rho)$  sont respectivement l'énergie interne, la pression et le flux de chaleur (défini dans l'équation 3.47) qui sont fonction de la température et de la densité.

La manière la plus évidente qui se présente à nous est d'ajouter les tenseurs de contraintes visqueuses et de Korteweg. Après le développement de l'équation (3.42) on obtient l'expression du tenseur K.

$$K = \lambda \begin{pmatrix} \rho \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} & \rho \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Au regard des résultats que nous avons obtenus, nous avons opté pour une autre manière d'inclure le terme de Korteweg. Nous utilisons l'égalité suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot K = \lambda \rho \vec{\nabla} \Delta \rho \quad (3.49)$$

On le considère comme un terme source, pareillement que dans [12]. On obtient ainsi la relation suivante :

$$S_{TSx} = \lambda \rho \left( \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \rho}{\partial x \partial y^2} \right) \quad S_{TSy} = \lambda \rho \left( \frac{\partial^3 \rho}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \rho}{\partial y^3} \right) \quad (3.50)$$

En ce qui concerne l'équation de conservation de l'énergie, on utilise le terme source suivant :

$$SE_{TS} = \nabla \cdot (K \cdot \vec{V}) \quad (3.51)$$

$$SE_{TS} = \nabla \cdot \begin{pmatrix} K_{xx}u + K_{xy}v \\ K_{xy}u + K_{yy}v \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Après développement, on retrouve la formule suivante pour le terme source de Korteweg pour l'équation de conservation de l'énergie.

$$\begin{aligned}
SE_{TS} = & \lambda \left[ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta \rho + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left[ \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 \right] \right] \\
& - \lambda \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} + u \rho \left( \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \rho}{\partial x \partial y^2} \right) + v \rho \left( \frac{\partial^3 \rho}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \rho}{\partial y^3} \right) \right] \quad (3.53)
\end{aligned}$$

### 3.4.2.1 Difficultés liées au terme de Korteweg

La première difficulté est l'estimation de la dérivée partielle d'ordre trois de la densité en espace. De plus le terme de Korteweg inclut une échelle de longueur qui représente l'épaisseur de l'interface liquide-vapeur. Cette échelle de longueur doit être prise en compte par le maillage. Par souci de réalisme l'épaisseur de l'interface doit être la plus petite possible. Pour bien comprendre ce qui pose problème il faut regarder le terme de Korteweg qui est une multiplication du coefficient  $\lambda$  et des dérivées spatiales de la densité. Pour un maillage donné, la dérivée d'une variable est prise comme la variation de celle-ci sur une longueur de maille divisée par la longueur de la cellule. Maintenant, si la longueur de la cellule est plus grande (beaucoup plus grande dans nos cas test) que la taille de l'interface liquide vapeur, on sous estime très largement la valeur des dérivées de la densité. Par conséquent, si on utilise la valeur physique du coefficient  $\lambda$  on sous estime la force de tension de surface.

Il existe des méthodes qui contournent ce problème en élargissant artificiellement l'interface liquide-vapeur tout en prenant soin de ne pas modifier les grandeurs surfaciques telle que la tension de surface C'est le cas dans le travail de Jamet [21].

Notre démarche consiste à déterminer la valeur du coefficient  $\lambda$  que l'on doit utiliser pour contrecarrer l'effet du maillage qui sous estime les dérivées de la densité. Et cela on se basant sur la méthode d'élargissement artificielle de l'interface liquide-vapeur proposée par Jamet [21]. C'est ce qui est développé dans la section suivante.

### 3.4.3 Le calcul du coefficient capillaire $\lambda$

Si on se place dans un repère 2d, la force de tension de surface est définie comme étant le produit entre la tension de surface  $\sigma$  et la courbure de cette dernière. Dans le cas où l'on considère une épaisseur de l'interface liquide vapeur sur laquelle la transition entre la vapeur et le liquide se fait de manière continue, et que l'on choisi de modéliser les effets capillaires par le terme de Korteweg, on se retrouve avec un tenseur de contrainte 3.48 dont le produit avec la normale

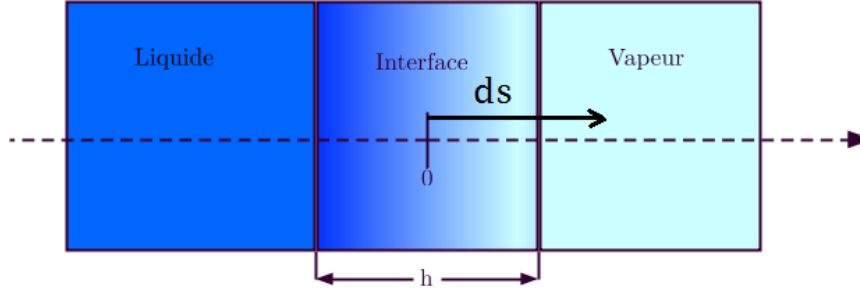


FIGURE 3.4 – Représentation de l'interface diffuse liquide-vapeur. Interface plane en 2d

à la surface  $\vec{ds}$  (voir le schéma 3.4) donne la force de la tension de surface. La question se pose donc de la possibilité de définir une relation entre le coefficient de capillarité  $\lambda$  et la tension de surface  $\sigma$ . Une recherche bibliographique dans ce sens nous a mené au développement réalisé par Jamet [21] qui permet de relier les deux grandeurs sous réserve de connaître le profil de la masse volumique à l'intérieur de l'interface liquide vapeur. Il aboutit à la relation suivante qui est vérifiée dans le cas de l'équilibre thermodynamique.

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \quad (3.54)$$

Pour déterminer une expression reliant  $\sigma$  à  $\lambda$  il faut connaître le profil de la masse volumique, en fonction de l'abscisse  $z$ , à l'intérieur de l'interface liquide-vapeur.

Le développement qui suit a pour but de trouver une expression pour le profil de la masse volumique.

On considère le système fluide composé d'une zone vapeur, d'une autre liquide et de l'interface entre les deux. L'énergie interne du fluide dépend non seulement de son entropie et de sa masse volumique mais aussi de son gradient de densité. On note  $F$  l'énergie libre du fluide et  $F^0$  l'énergie libre dite classique.

$$F = F^0 + \lambda \frac{(\nabla \rho)^2}{2} \quad (3.55)$$

On appelle l'énergie libre totale la fonction  $F(\rho, T, \nabla \rho)$  et sa différentielle s'écrit :

$$dF = -SdT + g d\rho + \Phi \cdot d\nabla \rho \quad (3.56)$$

$S$  étant l'entropie,  $g$  l'enthalpie libre de Gibbs.

L'état d'équilibre d'un système fermé et isolé correspond à une entropie maximale. On aura donc :

$$\delta \int_V [S + L_1 U(S, \rho, \nabla \rho) + L_2 \rho] dV = 0 \quad (3.57)$$

$U$  étant l'énergie interne,  $L_1$  et  $L_2$  sont deux contraintes correspondant, respectivement, aux conservations de l'énergie et de la masse.

Puisque  $U = F + ST$ . On aura

$$\int_V [(1 + L_1 T) \delta S + (L_1 g + L_2) \delta \rho + L_1 \Phi \cdot \delta \nabla \rho] dV = 0 \quad (3.58)$$

En utilisant la transformation suivante :

$$\Phi \cdot \delta \nabla \rho = \nabla \cdot (\Phi \delta \rho) - (\nabla \cdot \Phi) \delta \rho$$

Et en imposant un angle de contact de  $90^\circ$  sur la limite du domaine qui s'écrit comme suit :

$$\int_V \nabla \cdot (\Phi \delta \rho) dV = \int_{\partial V} n \cdot \Phi \delta \rho ds = 0$$

On obtient :

$$\int_V [(1 + L_1 T) \delta S + (L_1 (g - \nabla \cdot \Phi) + L_2) \delta \rho] dV = 0 \quad (3.59)$$

L'équation 3.59 est satisfaite pour :

$$T = -\frac{1}{L_1}$$

$$g - \nabla \cdot \Phi = -\frac{L_2}{L_1}$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont constantes. La première condition correspond à une température d'équilibre constante dans tout le domaine et la deuxième condition donne l'expression de l'enthalpie de Gibbs généralisée qu'on note  $\tilde{g}$ .

$$\tilde{g} = g - \nabla \cdot \Phi = cste \quad (3.60)$$

On réécrit la condition d'équilibre 3.60 en utilisant la définition de l'enthalpie libre de Gibbs généralisée :  $\tilde{g} = \partial F / \partial \rho$ . et en utilisant l'expression de l'énergie libre totale définie par la formule 3.55. On obtient l'expression suivante.

$$\frac{\partial F^0}{\partial \rho}(\rho, T_0) - \lambda \nabla^2 \rho = cste \quad (3.61)$$

On obtient une équation différentielle que le profil de densité  $\rho(z)$  doit satisfaire à l'équilibre. On considère une interface plane où  $z$  est la coordonnée normale à l'interface. On recherche la fonction  $\rho(z)$  qui satisfasse la condition :

$$g^0(\rho) - \lambda \frac{d^2 \rho}{dz^2} = cste \quad (3.62)$$

Sachant que dans la phase liquide pure et la phase vapeur pure (c.a.d. loin de l'interface) on a  $d^2 \rho / dz^2 = 0$  et  $d\rho / dz = 0$ . on aura :

$$g^0(\rho_v) = g^0(\rho_l) = g_{eq}^0 \quad (3.63)$$

En multipliant l'équation 3.62 par  $d\rho / dz$  et après intégration par rapport à  $\rho$  on obtient :

$$F^0(\rho) - F^0(\rho_v) - g_{eq}(\rho - \rho_v) = \frac{\lambda}{2} \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \quad (3.64)$$

On définit la fonction suivante :

$$W(\rho) = F^0(\rho) - F^0(\rho_v) - g_{eq}(\rho - \rho_v) \quad (3.65)$$

En utilisant une modélisation de la fonction  $W(\rho)$  proposée par Jamet [21].

$$W(\rho) = A(\rho - \rho_v)^2(\rho - \rho_l)^2 \quad (3.66)$$

On réécrit donc l'équation 3.64, après une première intégration, comme suit

$$\frac{d\rho}{dz} = \sqrt{\frac{2A}{\lambda}}(\rho - \rho_v)(\rho - \rho_l) \quad (3.67)$$

Cette équation admet la solution suivante :

$$\rho(z) = \frac{\rho_l + \rho_v}{2} + \frac{\rho_l - \rho_v}{2} \tanh\left(\frac{z}{2h}\right) \quad (3.68)$$

avec  $h$  représentant l'épaisseur de l'interface liquide-vapeur.

$$h = \frac{1}{\rho_l - \rho_v} \sqrt{\frac{\lambda}{2A}} \quad (3.69)$$

$A$  est un paramètre caractéristique de la fonction  $F^0(\rho)$ . Pour le déterminer on utilise les relations suivantes :

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_v = 2A\rho_v(\rho_l - \rho_v)^2 \quad (3.70)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_l = 2A\rho_l(\rho_l - \rho_v)^2 \quad (3.71)$$

Maintenant qu'on a déterminé une expression pour la densité  $\rho(z)$  dans l'interface, il est possible d'avoir une relation entre la tension de surface  $\sigma$  et le coefficient capillaire  $\lambda$  en utilisant l'équation 3.54. On obtient donc :

$$\sigma = \frac{(\rho_l - \rho_v)^3}{6} \sqrt{2A\lambda} \quad (3.72)$$

En utilisant l'équation 3.69 on obtient une relation liant la tension de surface physique  $\sigma$  avec l'épaisseur de l'interface  $h$  et le coefficient capillaire  $\lambda$  artificiel.

$$\lambda = \frac{3\sigma h}{2(\rho_l - \rho_v)^2} \quad (3.73)$$

L'épaisseur de l'interface  $h$  est donnée par la relation suivante :

$$h = \sum_i^n \frac{\sqrt{A_i}}{n} \quad (3.74)$$

où  $n$  est le nombre de mailles total du domaine et  $A_i$  la surface d'une cellule  $i$  du maillage.

### 3.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les détails concernant le modèle de cavitation développé pour la prise en compte de la gravitation et surtout de la tension de surface par le terme de Korteweg. Nous nous sommes intéressé à la problématique d'avoir une épaisseur d'interface liquide-vapeur artificielle pour les modèles à interface diffuse et nous y avons apporté une réponse en calculant le coefficient capillaire  $\lambda$  suivant la taille du maillage. Dans le chapitre qui suit nous allons aborder la discrétisation temporelle et spatiale des équations de conservation en utilisant la méthode des moindres carrés mobiles.





# Méthode Numérique

---

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>45</b>
<b>4.2</b>	<b>Équations à résoudre</b>	<b>46</b>
<b>4.3</b>	<b>Formulation en volumes finis</b>	<b>47</b>
<b>4.4</b>	<b>Méthode MLS</b>	<b>49</b>
4.4.1	Définition	49
4.4.2	Le Stencil	49
4.4.3	Formulation	51
4.4.4	Fonctions de forme	52
4.4.5	Fonctions Kernel	53
4.4.6	Estimation des Dérivées Spatiales	53
<b>4.5</b>	<b>Discrétisation des flux numériques</b>	<b>55</b>
4.5.1	Flux de convection	55
4.5.2	Flux de diffusion	58
<b>4.6</b>	<b>Traitement des termes sources</b>	<b>58</b>
4.6.1	Le terme source de gravitation $S_G$	59
4.6.2	Le terme source de tension de surface	60
<b>4.7</b>	<b>Discrétisation temporelle</b>	<b>61</b>
<b>4.8</b>	<b>Considérations liées au modèle numérique</b>	<b>62</b>
4.8.1	Traitement de la turbulence et la méthode FV-MLS : l'ap- proche MILES	62
4.8.2	Les discontinuités et les ordres élevés	62
4.8.3	Conditions aux limites	64
<b>4.9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>65</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous décrivons les étapes de résolution des équations différentielles de type Navier-Stokes & Korteweg. Nous avons choisi d'utiliser la

méthode des Volumes Finis combinée à une approximation par moindres carrés mobiles (FV-MLS) pour la discrétisation spatiale des équations de conservation. Cette manière de procéder permet d'utiliser des maillages non structurés tout en minimisant le nombre d'opération effectuées lors d'une itération.

## 4.2 Équations à résoudre

Pour éviter l'encombrement dans l'écriture nous allons utiliser la formulation suivante pour le système d'équations 3.4 à 3.6.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = \mathbf{S} \quad (4.1)$$

Dans cette équation  $\mathbf{U}$  représente le vecteur des variables conservatives donné par la relation suivante :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

les termes  $\mathbf{F}_x$  et  $\mathbf{F}_y$  représente les flux qui sont définis par

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{F}_x^C - \mathbf{F}_x^V \quad (4.3)$$

$$\mathbf{F}_y = \mathbf{F}_y^C - \mathbf{F}_y^V \quad (4.4)$$

Où l'exposant V signifie visqueux et l'exposant C convectif.

$$\mathbf{F}_x^C = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, \mathbf{F}_x^V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{F}_y^C = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}, \mathbf{F}_y^V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Et  $\mathbf{S}$  le terme source qui comprend les termes source de Korteweg et de gravitation :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_{TSx} + S_{Gx} \\ S_{TSy} + S_{Gy} \\ SE_{TS} + SE_G \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

### 4.3 Formulation en volumes finis

On subdivise le domaine de calcul en volumes de contrôle  $\Omega_i$  qui ont pour frontières  $\Gamma_i$ . Rappelons qu'en 2d, le volume de contrôle est une surface et que la frontière est un contour. La discrétisation par volumes finis se fait en utilisant la forme intégrale des équations de conservation du système 4.1.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\Omega_i} \mathbf{U} d\Omega_i + \int_{\Gamma_i} (\mathbf{F}_x n_x + \mathbf{F}_y n_y) d\Gamma_i = \int \int_{\Omega_i} \mathbf{S} d\Omega_i \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$  est la normale sortante à la frontière  $\Gamma_i$ .

Le terme temporel peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int_{\Omega_i} \mathbf{U} d\Omega_i = \Omega_i \frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} \quad (4.9)$$

où  $\bar{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Omega_i} \int \int_{\Omega_i} \mathbf{U}(x, y) d\Omega_i$  est le vecteur des valeurs moyennes des variables conservatives dans le volume de contrôle  $\Omega_i$ .

Au final on résout le système d'équation suivant :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega_i} \mathbf{R}_i \quad (4.10)$$

où le résidu  $\mathbf{R}_i$  est défini par la relation suivante :

$$\mathbf{R}_i = \int_{\Gamma_i} (\mathbf{F}_x n_x + \mathbf{F}_y n_y) d\Gamma_i - \int \int_{\Omega_i} \mathbf{S} d\Omega_i \quad (4.11)$$

En 2d l'intégrale sur  $\Gamma_i$  est une intégrale curviligne sur le contour de l'élément de contrôle. Si on prend un élément triangulaire, cela représente les trois arêtes qui le composent. Cette intégrale est équivalente à la somme des intégrales curvilignes sur chaque arête. Pour calculer l'intégrale sur une arête on utilise une quadrature de Gauss qui est à l'ordre deux. On utilise donc la valeur des flux sur trois points comme montré sur la figure 4.1, avec les coefficients suivants  $(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6})$  respectivement pour les points  $(1, 3, 2)$ .

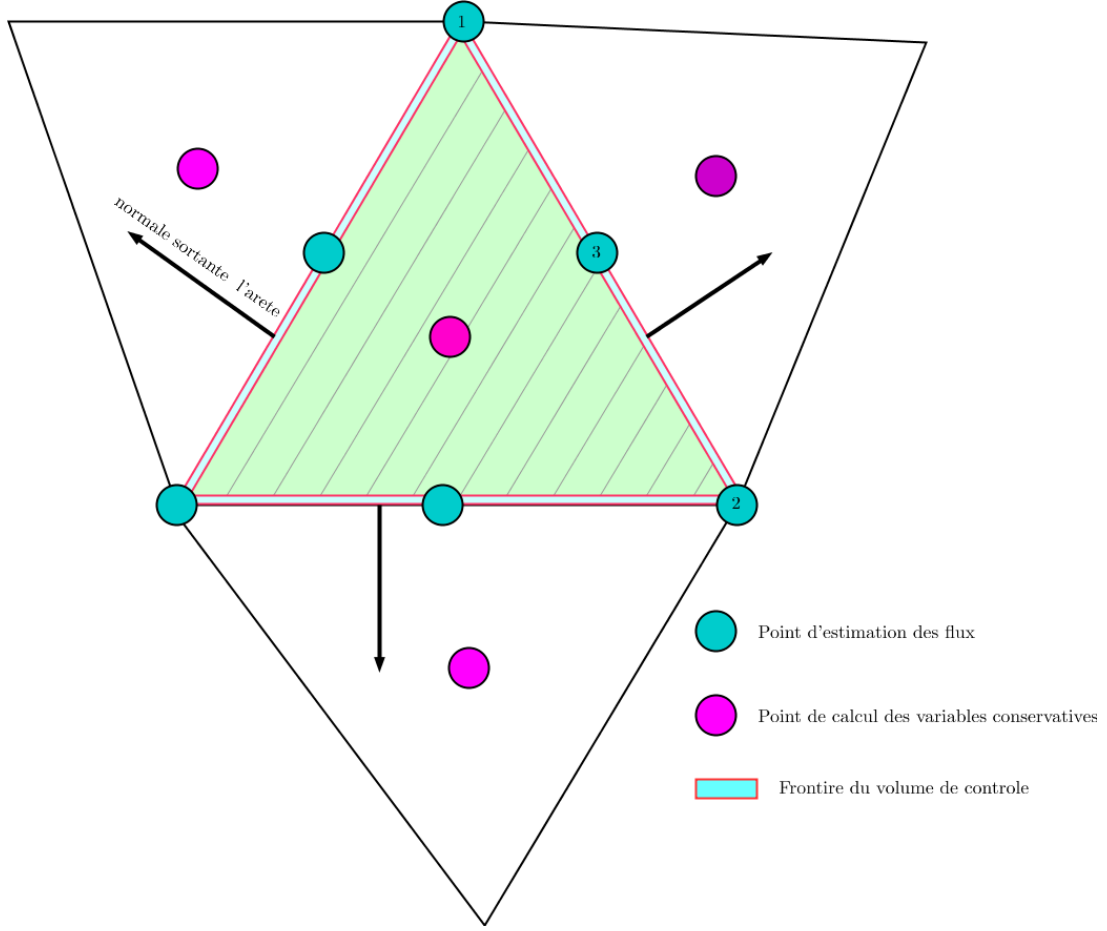


FIGURE 4.1 – Volume de contrôle en 2D pour un maillage triangulaire

$$Ri = \sum_{k=1}^{N_f} R_k \quad (4.12)$$

où  $N_f$  est le nombre de faces.

$$R_k = \frac{1}{6}F_1^k + \frac{4}{6}F_3^k + \frac{1}{6}F_2^k \quad (4.13)$$

avec :  $F_j^k = F_{j,x}^k \cdot n_x^k + F_{j,y}^k \cdot n_y^k$ .

L'intégrale sur le volume de contrôle quand à elle est une intégrale surfacique. Dans ce cas on utilise une quadrature de Gauss d'ordre deux à un seul point en prenant la valeur de la fonction au centre du triangle (voir la figure 4.1) et en la multipliant par la surface du triangle qu'on note  $A_i$ .

$$\int \int_{\Omega_i} \mathbf{S} d\Omega_i = A_i \cdot S(X_I) \quad (4.14)$$

où  $X_I$  est le vecteur coordonnées du centre de l'élément de calcul  $\Omega_i$ .

L'étape suivante consiste en la discrétisation de chacun des termes qui composent le système 4.10. La partie temporelle est traitée dans la section 4.7. Pour discrétiser les termes spatiaux, on utilise la méthode des moindres carrés mobiles décrite dans la section 4.4.

## 4.4 Méthode MLS

### 4.4.1 Définition

La méthode des moindres carrés mobiles (MLS : moving least squares approximation), initialement formulée pour la reconstruction de surfaces à partir de nuages de points, a vu son introduction dans la communauté de la simulation de la mécanique des fluides pour les méthodes "meshless". Une formulation en volume finis a été développée dans [9], [38] et [22]. On donne dans cette section une description générale de cette méthode, et sa formulation en volume finis pour les maillages non structurés. La méthode FV-MLS permet une reconstruction de la solution continue par morceaux dans chaque volume de contrôle. Ainsi, pour le calcul des flux numériques, les variables utilisées sont directement celles calculées aux interfaces plutôt que celles au centre du volume de contrôle.

### 4.4.2 Le Stencil

L'utilisation de la méthode des moindres carrés mobiles dans une formulation de type volumes finis nécessite de définir l'ensemble des points qui interviennent dans la reconstruction locale de la solution. Dans un premier temps la solution est calculée au centre de chaque cellule, de la manière Cell Centred.

Il existe une taille du stencil minimale notée  $N_{s,min}$  qui correspond à la dimension de la base polynomiale.

$$N_{s,min} = \frac{(\text{ordre} + \text{dim})!}{\text{ordre}! \text{dim}!} \quad (4.15)$$

Où *ordre* désigne l'ordre de reconstruction MLS et *dim* la dimension spatiale. L'union des stencils doit recouvrir tout le domaine de calcul. Le nombre de cellules appartenant à un stencil doit être optimisé de manière à obtenir un bon compromis entre stabilité numérique et minimisation des effets dissipatifs. Il existe donc une taille optimale du stencil notée  $N_s$  qu'on associe souvent avec le paramètre de forme  $\kappa$  qu'on retrouve dans l'expression de la fonction Kernel voir la section 4.4.5. Nous utilisons la notation  $(N_a, \kappa)$  où  $N_a = N_s - N_{s,min}$  est le

nombre d'éléments qu'on rajoute au stencil en plus du nombre de point minimum qu'il doit contenir ( $N_{s,min}$  défini dans l'équation 4.15). Pour les calculs que nous avons réalisés dans la thèse, le choix du couple optimal  $(N_s, \kappa)$ .

Pour la reconstruction des variables au centre des cellules nous utilisons un stencil centré au point  $X_I$  de la cellule  $I$  concernée comme on peut le voir sur la figure 4.2. Une fois la taille du stencil connue, on choisit sa distribution. Le stencil doit être aussi compact que possible. Si le nombre  $N_s$  ne le permet pas, on fait en sorte que le barycentre du stencil soit le plus proche possible de  $X_I$ .

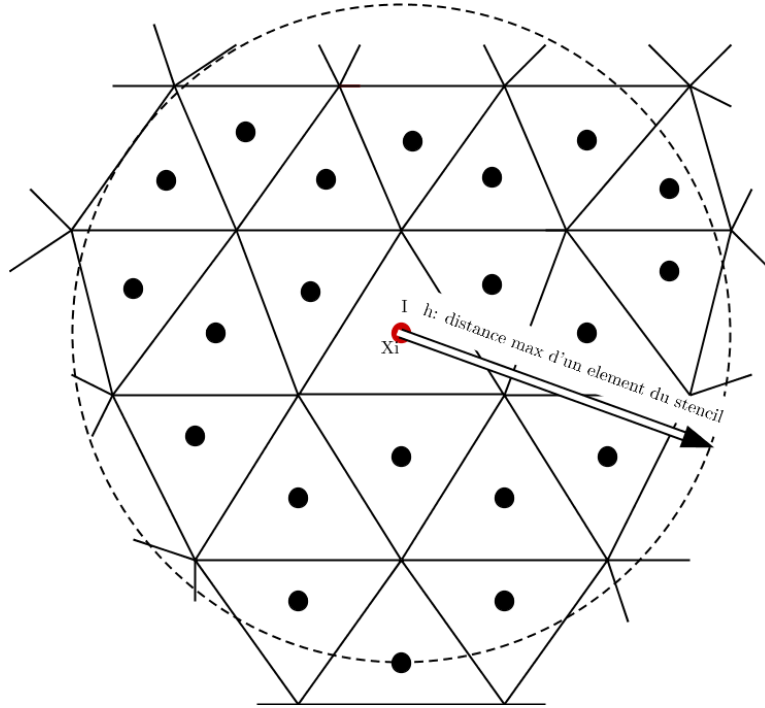


FIGURE 4.2 – représentation du stencil en 2D avec ses caractéristiques

Pour la reconstruction des variables et de leurs dérivées aux nœuds d'intégration des flux, on utilise le stencil associé à la cellule active et on rajoute le nœud en question. On se retrouve avec des stencils de taille  $N_{sf} = N_s + 1$ . Pour que le stencil soit centré en ce nœud (nœud d'intégration) on recalcule les distances  $s_{x,i}$ ,  $s_{y,i}$ ,  $h_x$  et  $h_y$  (voir la section 4.4.5).

Le schéma MLS est ensuite appliqué, et utilise ces variables conservatives préalablement définies pour constituer une solution globalement continue par morceau, par le biais d'une approximation, en extrapolant la valeur au centre de la cellule à ses frontières.

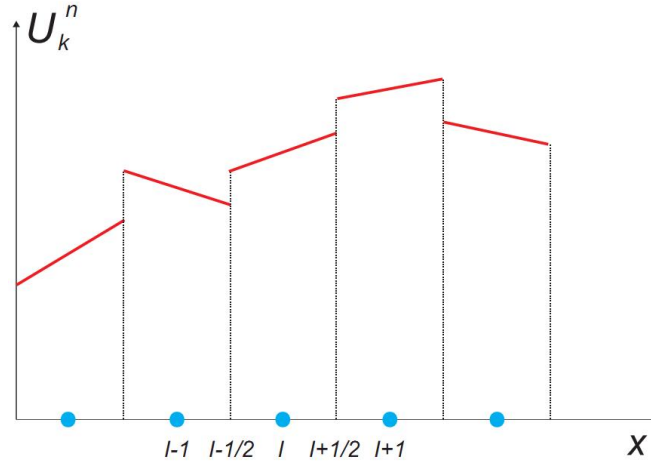


FIGURE 4.3 – représentation de la solution continue par morceau reconstruite dans un stencil de 5 éléments en 1D

### 4.4.3 Formulation

L'idée principale pour la reconstruction à un ordre élevé de précision dans chaque cellule passe par le calcul des dérivées successives dans la formulation en série de Taylor de la solution : en 2D, nous considérons la variable  $U(X)$ , où  $X$  est le vecteur des coordonnées spatiales. Le développement de Taylor de  $U(X)$  au voisinage de  $X_I$  est donné par :

$$U(., X)|_I = \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} (x-x_I)^{\alpha-\beta} (y-y_I)^{\beta} \frac{\partial^{\alpha} U}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^{\beta}}(., X_I) \quad (4.16)$$

Ce développement devient une approximation si on se limite à un nombre de termes qu'on note  $m$  et qui représente l'ordre du développement. On obtient alors l'expression suivante :

$$U(., X)|_I = \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} (x-x_I)^{\alpha-\beta} (y-y_I)^{\beta} \frac{\partial^{\alpha} U}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^{\beta}}(., X_I) + o((x-x_I)^m, (y-y_I)^m) \quad (4.17)$$

$U(., X)|_I$  est la reconstruction de la solution au voisinage du point  $X_I$ .

La méthode MLS permet de déterminer avec précision les différents termes du développement en série de Taylor. Pour ce faire, on approxime la fonction  $U(X)$  par une pondération par moindres carrés mobiles :

$$U(X) \approx \tilde{U}_{[X_I]}(X) = \sum_{i=1}^m p_i(X) a_i = p^T(x) a(X_i) \quad (4.18)$$



où  $p^T$  est une base polynomiale de dimension  $m$ , et  $a(x_i)$  un ensemble de paramètres à déterminer, de manière à ce qu'ils minimisent la fonctionnelle suivante :

$$J(a(X_i)) = \int_{\Gamma_{X_I}} W_{[X_i]}(X, h_s) [U(X) - p^T(X)a(X_I)]^2 dX \quad (4.19)$$

Où  $p(X)$  est une base polynomiale qui contient autant de fonctions qu'il y a de termes dans l'expansion de Taylor.  $W_{[X_i]}(X, h_s)$  est la fonction Kernel centrée au point  $X_I$  et où  $h_s$  est le paramètre de lissage qui représente la distance entre le point centrale  $X_I$  et le point le plus éloigné du stencil (voir figure 4.2).

#### 4.4.4 Fonctions de forme

Les fonctions de formes sont les fonctions qui servent à déterminer les coefficients de pondération dans l'approximation de la solution  $U(X)$ . Elles sont connues pour être utilisées dans la méthode des éléments finis. Elles sont données par la formule suivante [8] :

$$N_{[X_I]}(X)^T = \mathbf{p} \left( \frac{X - X_I}{h_s} \right)^T \cdot \left( P_{\Omega_{X_I}} \cdot W_{[X_I]}(X) \cdot P_{\Omega_{X_I}}^T \right)^{-1} \cdot P_{\Omega_{X_I}} \cdot W_{[X_I]}(X) \quad (4.20)$$

Cette écriture matricielle est mieux adaptée pour un code de calcul. On peut réécrire l'interpolation 4.18 comme suit :

$$\tilde{U}_{[X_I]}(X) = N_{[X_I]}^T(X) U_{\Omega_{X_I}} \quad (4.21)$$

Où  $U_{\Omega_{X_I}}$  est le vecteur des variables  $U$  au centre de chaque élément du stencil. Les matrices  $P_{\Omega_{X_I}}$  sont définies comme suit :

$$P_{\Omega_{X_I}} = \left( \mathbf{p} \left( \frac{X_1 - X_I}{h_s} \right) \cdots \mathbf{p} \left( \frac{X_{n_{X_I}} - X_I}{h_s} \right) \right) \quad (4.22)$$

$n_{X_I}$  est le nombre d'éléments que compte le stencil construit autour de l'élément dont les coordonnées centrales se trouvent être le vecteur  $X_I$ .

On réécrit la formule 4.27 de manière plus compacte :

$$N_{[X_I]}(X)^T = \mathbf{p} \left( \frac{X - X_I}{h_s} \right)^T \cdot M^{-1} \cdot P_{\Omega_{X_I}} \cdot W_{[X_I]}(X) \quad (4.23)$$

$M$  est appelée matrice des moments, voir plus de détails dans [9].

### 4.4.5 Fonctions Kernel

La fonction kernel est la fonction qui donne la distribution des coefficients de pondération pour les points formant le stencil. Elle prend une valeur maximum au point auquel elle est associée et diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne de ce point. On utilise dans le code de calcul une fonction kernel exponentielle qui est adaptée à une distribution anisotrope des nœuds du stencil. Son expression en 2d est donnée par :

$$W_{[X_I]}(X, \kappa) = \frac{e^{-(s_x \kappa_x / h_x)^2} - e^{-\kappa_x^2}}{1 - e^{-\kappa_x^2}} \frac{e^{-(s_y \kappa_y / h_y)^2} - e^{-\kappa_y^2}}{1 - e^{-\kappa_y^2}} \quad (4.24)$$

avec :  $s_x = |x - x_I|$ ,  $s_y = |y - y_I|$ .  $h_x = \max |x_i - x_I|$ ,  $h_y = \max |y_i - y_I|$  avec  $i = 1 \rightarrow N_{sf}$  ( $N_{sf}$  est nombre d'éléments du stencil).  $\kappa_x$  et  $\kappa_y$  sont les paramètres de forme respectivement dans la direction  $x$  et  $y$ .

Le choix des paramètres de forme revient à un compromis entre dissipation et stabilité du schéma car en augmentant  $\kappa$  on diminue la dissipation numérique mais on crée de l'instabilité, pour plus de détails voir la référence [37]. Comme nous l'avons déjà précisé dans la section 4.4.2, le choix de  $\kappa$  est associé au choix du nombre additionnel de cellules dans le stencil.  $\kappa$  est généralement pris dans l'intervalle [5 7].

### 4.4.6 Estimation des Dérivées Spatiales

Pour obtenir les dérivées spatiales composant les termes de l'expansion de Taylor on applique l'opérateur dérivée sur l'approximation suivante de la solution

$$U(., X) = \sum_j^{n_x} N_{X_I^{(j)}} U_j \quad (4.25)$$

Nous obtenons la formule suivante :

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta}(., X_I) = \sum_j \frac{\partial^\alpha N_{X_I^{(j)}}}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta}(X_I) \cdot U_j \quad (4.26)$$

La reconstruction énoncée ci-dessus ne dépend que de paramètres liés au maillage. En conséquence, pour un maillage fixe, la fonction de forme et ses dérivées ne sont calculées qu'une seule fois.

L'équation (4.26) sera utilisée pour la reconstruction des dérivées partielles en espace des variables utilisées dans les différents modèles de prise en compte de la tension superficielle.

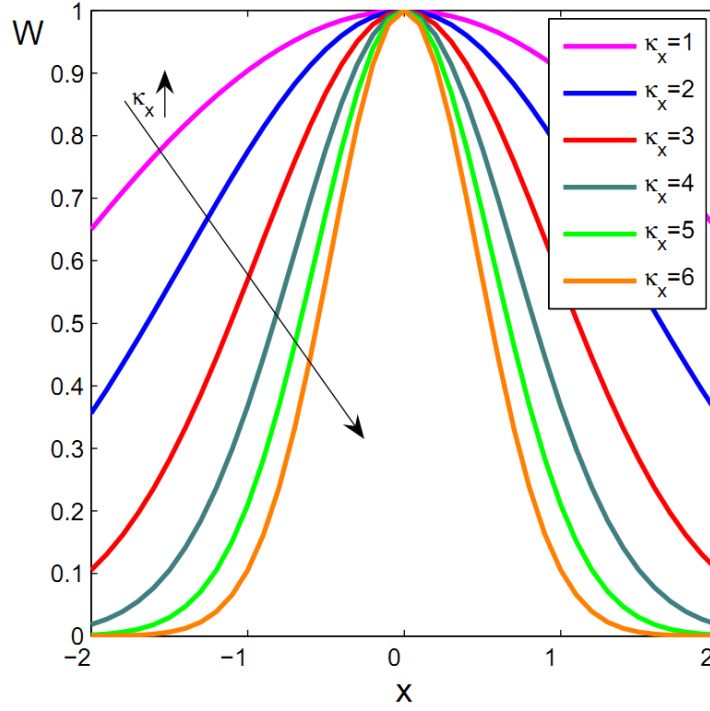


FIGURE 4.4 – la forme de la fonction kernel suivant la valeur du paramètre de forme  $\kappa$  [37]

Il ne reste plus qu'à déterminer les relations pour calculer les dérivées successives des fonctions de forme. Ces dernières dépendent exclusivement des dérivées successives de la base polynomiale et des fonctions kernel. Rappelons l'expression de la fonction de forme :

$$N_{[X_I]}(X)^T = \mathbf{p} \left( \frac{X - X_I}{h} \right)^T \cdot M^{-1} \cdot P_{\Omega_{X_I}} \cdot W_{[X_I]}(X) \quad (4.27)$$

Soit

$$C(X) = M^{-1} \cdot P_{\Omega_{X_I}} \cdot W_{[X_I]}(X) \quad (4.28)$$

La dérivée de la fonction de forme au centre de la cellule de calcul I est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial^\alpha N_{X_I}}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta}(X_I) = \frac{\partial^\alpha p(0)}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} C(X_I) + p(0) \frac{\partial^\alpha C(X_I)}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} \quad (4.29)$$

Vu la complexité des dérivées d'ordre élevé du terme  $C$ , on considère l'approximation suivante pour les dérivées où  $\alpha \geq 2$ .

$$\frac{\partial^\alpha N_{X_I}}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta}(X_I) \approx \frac{\partial^\alpha p(0)}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta} C(X_I) \quad (4.30)$$

La dérivée du terme  $C$  est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial C(X_I)}{\partial x} = C(X_I) W^{-1}(X_I) \frac{\partial W}{\partial x} (I - P_{\Omega_x}^T C(X_I)) \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial C(X_I)}{\partial y} = C(X_I) W^{-1}(X_I) \frac{\partial W}{\partial y} (I - P_{\Omega_x}^T C(X_I)) \quad (4.32)$$

## 4.5 Discrétisation des flux numériques

Les flux numériques doivent être estimés à l'interface des volumes de contrôle, ce qui revient en 2d aux arêtes des éléments du maillage. Sachant qu'une arête est commune à deux éléments qu'on qualifie de droite et gauche, on utilise l'indice  $R$  comme right pour l'élément de droite et l'indice  $L$  comme left pour l'élément de gauche. L'extrapolation par l'expansion de Taylor (décrite dans la section 4.5.1) à partir de l'élément de droite et de l'élément de gauche génère une discontinuité au niveau de l'arête.

### 4.5.1 Flux de convection

Pour calculer les variables  $U(X_p)$  et leurs dérivées aux points de quadrature ( $X_p$  représente les coordonnées d'intégration des flux) on utilise le développement de Taylor à l'ordre  $N$  (équation 4.17) en remplaçant dans l'expression  $X = (x, y)$  par les coordonnées des points de quadrature qu'on note  $X_p = (x_p, y_p)$ . Cela donne :

$$U(., X_p)|_I = \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^{\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} (x_p - x_I)^{\alpha-\beta} (y_p - y_I)^{\beta} \frac{\partial^\alpha U}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta}(., X_I) \quad (4.33)$$

Sachant que les dérivées successives de  $U(., X_I)$  sont calculées en utilisant les fonctions de formes, par la formule 4.42, on se retrouve avec la formule suivante :

$$U(., X_p)|_I = \sum_{\alpha=0}^N \sum_{\beta=0}^{\alpha} \left[ \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} (x_p - x_I)^{\alpha-\beta} (y_p - y_I)^{\beta} \sum_j^{N_s} \frac{\partial^\alpha N_{X_I(j)}}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta}(X_I) \cdot U_j \right] \quad (4.34)$$

Un solveur de Riemann est utilisé pour lisser la solution sur les arêtes. Pour les flux convectifs, le schéma SLAU décrit dans [23] (Simple Low dissipation AUSM) est utilisé. Le flux convectif est divisé en deux parties : le terme de pression noté  $H^p$  et le terme de convection noté  $H^C$ . Suivant la formulation décrite dans [23] on a :

$$H^C = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \psi^+ + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \psi^- \quad (4.35)$$

Où  $\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ H \end{pmatrix}$  et  $\dot{m}$  représente le flux massique calculé par la formule :

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \left[ \rho_L (V_{nL} + |\bar{V}_n|^+) + \rho_R (V_{nR} + |\bar{V}_n|^-) - \frac{\chi}{\bar{c}} (p_L - p_R) \right] \quad (4.36)$$

où

$$|\bar{V}_n|^+ = (1 - g_s) |\bar{V}_n| + g_s |V_{nL}|$$

$$|\bar{V}_n|^- = (1 - g_s) |\bar{V}_n| + g_s |V_{nR}|$$

$$|\bar{V}_n| = \frac{\rho_L |\bar{V}_{nL}| + \rho_R |\bar{V}_{nR}|}{\rho_L + \rho_R}$$

$$|\bar{V}_{ni}| = u_i n_x + v_i n_y \quad \text{avec} \quad i = L, R$$

$$g_s = -\min[\max(M_L, 0), -1] \cdot \min[\max(M_R, 0), -1]$$

Le dernier terme de l'équation 4.36 n'est activé que pour de faibles nombres de Mach. Pour ce faire,  $\chi$  est défini par la relation suivante :

$$\chi = (1 - M^*)^2 \quad (4.37)$$

avec

$$M^* = \min \left( 1, \frac{1}{\bar{c}} \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + u_R^2 + v_R^2}{2}} \right)$$

Le flux de pression  $H^p$  est donnée par la formule suivante :

$$H^p = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{p} n_x \\ \bar{p} n_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

La pression est calculée de la même manière que dans le schéma AUSM [32].

$$\bar{p} = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{\beta_L - \beta_R}{2}(p_L - p_R) + (1 - \chi)\frac{\beta_L + \beta_R}{2}(p_L + p_R) \quad (4.39)$$

Où  $\beta_L$  et  $\beta_R$  sont basés sur le nombre de Mach et leurs expressions sont données dans [3]. Pour les faibles nombres de Mach ( $M$  tend vers 0), la formule précédente tend vers une discrétisation spatiale centrée de la pression (équation 4.40) qui aboutit au problème dit du "damier". Le fait de remplacer la pression sur les arêtes des volumes de contrôle par une interpolation linéaire de sa valeur aux centres des volumes de contrôle voisins fait que la pression n'est prise en considération que dans un point sur deux. Le risque vient du fait qu'un champ de pression très perturbé ne peut pas être capté par cette formulation.

$$\bar{p} = \frac{p_L + p_R}{2} \quad (4.40)$$

Alors il est nécessaire de modifier le schéma numérique. La solution proposée est d'utiliser une reconstruction MLS de la pression sur les points d'intégration des flux (points appartenant aux arêtes) voir [3]. On obtient l'expression suivante :

$$\bar{p} = \xi \cdot p_{MLS} + (1 - \xi)(\beta_L + \beta_R) \quad (4.41)$$

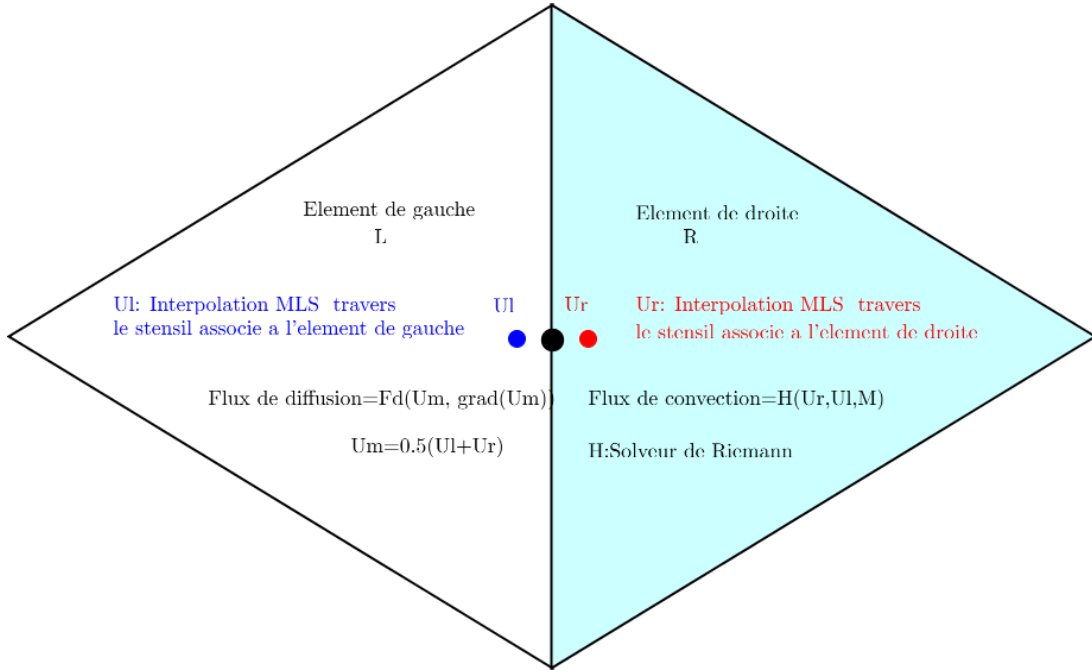


FIGURE 4.5 – Les points de calcul des flux numériques au centre de l'arrête

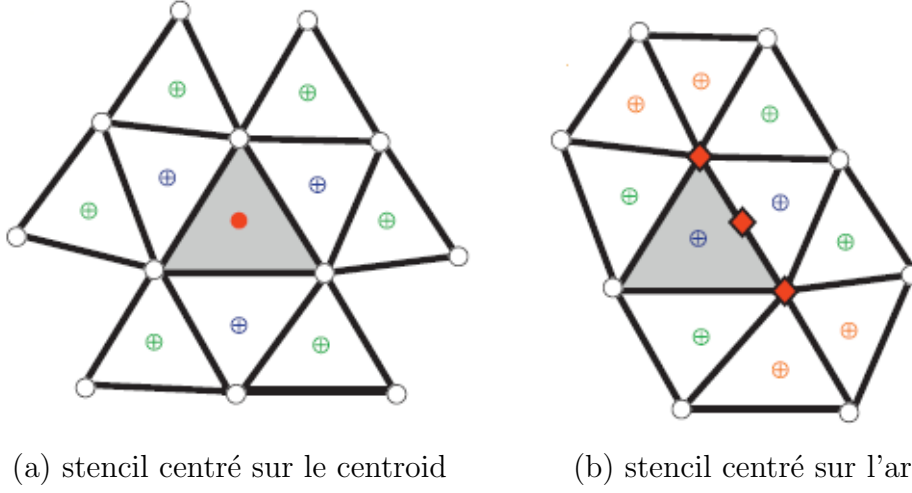


FIGURE 4.6 – Les deux types de stencils utilisés pour la reconstruction MLS : a. stencil utilisé dans la reconstruction de la solution et b. le stencil utilisé pour l'intégration des flux visqueux [8]

#### 4.5.2 Flux de diffusion

En ce qui concerne les flux visqueux, le calcul des dérivées des variables  $U(X)$  aux points de Gauss se fait par une reconstruction MLS (directe) en utilisant un stencil centré au point de Gauss (voir figure 4.6.b) décrit dans la section 4.4.2.

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta}(\cdot, X_p) = \sum_j^{N_s+1} \frac{\partial^\alpha N_{X_p^{(j)}}}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta}(X_p) \cdot U_j \quad (4.42)$$

où les fonctions de forme  $N_{X_p}$  sont calculées par rapport aux nœuds flux par la formule suivante :

$$N_{[X_p]}(X)^T = \mathbf{p} \left( \frac{X - X_p}{h} \right)^T \cdot \left( P_{\Omega_{X_p}} \cdot W_{[X_p]}(X) \cdot P_{\Omega_{X_p}}^T \right)^{-1} \cdot P_{\Omega_{X_p}} \cdot W_{[X_p]}(X) \quad (4.43)$$

### 4.6 Traitement des termes sources

Dans la thèse nous avons défini quatre termes sources. Deux correspondent à la force de tension de surface pour l'équation de quantité de mouvement et pour l'équation de l'énergie. Les deux autres correspondent aux termes source de la gravitation pour l'équation de quantité de mouvement et l'équation de l'énergie. Nous allons décrire la méthode employée pour les termes source de Korteweg et de gravitation pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Quand aux termes sources qui se trouvent dans l'équation de conservation de l'énergie, la méthode est développée en annexe.

Rappelons la formule du résidu donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{R}_i = \int_{\Gamma_i} (\mathbf{F}_x n_x + \mathbf{F}_y n_y) d\Gamma_i - \int \int_{\Omega_i} \mathbf{S} d\Omega_i \quad (4.44)$$

En 2d le terme source est intégré sur le volume de contrôle qui correspond à la cellule  $\Omega_i$ . On note par  $A_i$  la superficie de la cellule  $\Omega_i$

$$\int \int_{\Omega_i} \mathbf{S} d\Omega_i = A_i \bar{S} \quad (4.45)$$

où  $\bar{S}$  est la valeur moyenne de  $S$  dans la cellule. Si on calcule la valeur de  $S$  au centre de la cellule, on obtient une estimation de  $\bar{S}$  à l'ordre deux.

Le terme source  $S$  est une fonction des variables primitives et de leurs dérivées spatiales.

$$\bar{S} = f(U(X_I)|_I, U'(X_I)|_I, U''(X_I)|_I, \dots) \quad (4.46)$$

Pour déterminer la valeur des variables au centre de la cellule de calcul on utilise la reconstruction MLS suivante :

$$U(., X) = \sum_j^{N_s} N_{X_I^{(j)}} U_j \quad (4.47)$$

Pour déterminer les valeurs des dérivées spatiales successives des variables au centre de l'élément de contrôle on utilise la reconstruction MLS centrée sur la cellule de calcul.

$$\frac{\partial^\alpha U}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta}(\cdot, X_I) = \sum_j^{N_s} \frac{\partial^\alpha N_{X_I^{(j)}}}{\partial x^{\alpha-\beta} \partial y^\beta}(X_I) \cdot U_j \quad (4.48)$$

où les fonctions de formes  $N_{X_I^{(j)}}$  sont celles définies dans l'équation 4.27.

#### 4.6.1 Le terme source de gravitation $S_G$

Rappelons que :

$$S_G = \rho \vec{g} \quad (4.49)$$

où  $\vec{g} = (g_x, g_y)$  est constante. On aura donc l'expression suivante :

$$S_{Gx} = g_x \sum_j^{N_s} N_{X_I^{(j)}} \rho_j \quad (4.50)$$



$$S_{Gy} = g_y \sum_j^{N_s} N_{X_I^{(j)}} \rho_j \quad (4.51)$$

### 4.6.2 Le terme source de tension de surface

Nous avons vu dans le chapitre 3, deux manières de modéliser la force de tension de surface. Dans l'une, nous considérons que la force de tension de surface est le produit entre la tension de surface  $\sigma$  et la courbure qui se calcule grâce à la fraction volumique. Dans cette section nous le désignons par le modèle 1. Dans l'autre, nous utilisons le terme source de Korteweg qui comporte des dérivées troisième de la densité et le coefficient capillaire  $\lambda$ . Ce modèle sera désigné dans cette section par le modèle 2.

#### 4.6.2.1 Terme source de tension de surface par le modèle 1

On rappelle le terme source dans les équations de conservation de quantité de mouvement :

$$S_{TSx} = \sigma \kappa \ n_{LVx} \quad (4.52)$$

$$S_{TSy} = \sigma \kappa \ n_{LVy} \quad (4.53)$$

Rappelons que  $\vec{n}_{LV} = \frac{\vec{\nabla}\alpha}{||\vec{\nabla}\alpha||}$ . En terme de reconstruction MLS cela nous donne :

$$n_{LVx} = \frac{1}{Mod} \sum_j^{N_s} \frac{\partial N_{X_I^{(j)}}}{\partial x} \alpha_j \quad (4.54)$$

$$n_{LVy} = \frac{1}{Mod} \sum_j^{N_s} \frac{\partial N_{X_I^{(j)}}}{\partial y} \alpha_j \quad (4.55)$$

avec  $Mod$  le module du gradient de  $\alpha$  qui se calcule par la formule suivante :

$$Mod = \sqrt{\left( \sum_j^{N_s} \frac{\partial N_{X_I^{(j)}}}{\partial x} \alpha_j \right)^2 + \left( \sum_j^{N_s} \frac{\partial N_{X_I^{(j)}}}{\partial y} \alpha_j \right)^2} \quad (4.56)$$

Sachant que  $\kappa = -\nabla \vec{n}_{LV}$ . On reconstruit la courbure en utilisant l'expression suivante :

$$\kappa = - \left( \sum_j^{N_s} \frac{\partial N_{X_I^{(j)}}}{\partial x} n_{LVx} + \sum_j^{N_s} \frac{\partial N_{X_I^{(j)}}}{\partial y} n_{LVy} \right) \quad (4.57)$$

#### 4.6.2.2 Terme source de tension de surface par le modèle 2

Le terme source de Korteweg est explicité dans la relation 3.50. La reconstruction MLS de ce terme se traduit par les relations suivantes :

$$S_{TSx} = \lambda \rho_I \left( \sum_j^{N_s} \frac{\partial^3 N_{X_I^{(j)}}}{\partial x^3} \rho_j + \sum_j^{N_s} \frac{\partial^3 N_{X_I^{(j)}}}{\partial x \partial y^2} \rho_j \right) \quad (4.58)$$

$$S_{TSy} = \lambda \rho_I \left( \sum_j^{N_s} \frac{\partial^3 N_{X_I^{(j)}}}{\partial y \partial x^2} \rho_j + \sum_j^{N_s} \frac{\partial^3 N_{X_I^{(j)}}}{\partial y^3} \rho_j \right) \quad (4.59)$$

Où  $\rho_I$  est la densité au centre de la cellule de calcul I. On procède de la même manière pour le terme source de Korteweg de l'équation de conservation de l'énergie exprimée dans l'équation 3.53.

## 4.7 Discrétisation temporelle

Une discrétisation partielle en formulation volumes finis des équations de conservation est donnée par l'équation 4.10. On définit le résidu  $\mathbf{R}_i^n$  à l'instant  $t^n$  pour le volume de contrôle  $\Omega_i$  comme suit :

$$\mathbf{R}_i^n = \sum_{k=1}^{N_f} \sum_{j=1}^3 \left( \mathbf{F}_{\mathbf{x},i}^{\mathbf{kj}}(U^n) n_{x,i}^k + \mathbf{F}_{\mathbf{y},i}^{\mathbf{kj}}(U^n) n_{y,i}^k \right) w_{kj} - A_i \bar{S} \quad (4.60)$$

avec  $w_{kj}$  les coefficients utilisés dans le calcul de l'intégrale curviligne. On peut réécrire l'équation 4.10 comme suit :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{1}{\Omega_i} \mathbf{R}_i = 0 \quad (4.61)$$

pour déterminer la solution à l'instant  $t^{n+1}$  on utilise un schéma Euler explicite d'ordre 1 défini par la formule suivante :

$$\bar{\mathbf{U}}^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}^n - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \mathbf{R}_i = 0 \quad (4.62)$$

où  $\Delta t = t^{n+1} - t^n \leq \min_i \Delta t_i^n$  est le pas de temps minimal sur l'ensemble du domaine de calcul choisi par la condition CFL avec :

$$\Delta t_i = CFL \frac{\sqrt{A_i}}{\max(|\vec{u}_i| + c_i, |\vec{v}_i|)} \quad (4.63)$$

Rappelons qu'en 2d  $A_i$  est la surface (en  $m^2$ ) du volume de contrôle  $\Omega_i$ . Dans les calculs réalisés dans cette thèse, le pas de temps utilisé est inférieur ou égale à une valeur correspondant à un CFL de 0.5.

## 4.8 Considérations liées au modèle numérique

### 4.8.1 Traitement de la turbulence et la méthode FV-MLS : l'approche MILES

Le phénomène de cavitation est fortement turbulent. Les instabilités qui en résultent sont amplifiées par l'ordre élevé du schéma numérique. On retrouve le même phénomène au voisinage des discontinuités. Pour y remédier, il est d'usage d'utiliser un modèle de turbulence. Dans le modèle de turbulence LES (Large Eddy Simulation), on réalise une séparation grâce à un filtre. On résout les équations de transport pour les grandes structures et on utilise un modèle de sous maille pour les petites structures. Le modèle de sous maille sert à introduire une dissipation qui permet d'absorber l'énergie transmise par les grandes structures.

Les schémas dit ILES pour Implicite Large Eddy Simulation, ont pour origine le schéma WENO (Weighted Essentially non-oscillatory) qui permettent de dissiper les instabilités numériques générées à proximité des discontinuités. De la même manière, les schémas ILES utilisent la reconstruction des flux pour introduire une viscosité artificielle qui dans le cas de la turbulence reproduit l'effet de la viscosité turbulente. Cette dissipation numérique permet de simuler le comportement d'un modèle de sous maille.

Nogueira et al. montrent dans les articles [39] et [40] l'efficacité du modèle de turbulence nommé : Monotone Integrated Large Eddy Simulation (MILES) qui utilise la résolution multi-échelles de la méthode FV-MLS pour émuler le comportement du modèle de sous-maille de la LES. Nogueira [39] souligne que le modèle MILES permet d'éviter l'introduction d'une trop grande dissipation en utilisant le paramètre de contrôle ( $\kappa$ ). Rappelons que le paramètre de forme  $\kappa$  modifie les caractéristiques de dissipation ou de dispersion de la méthode FV-MLS en agissant sur la distribution des coefficients de pondération sur les points du stencil. Dans les calculs où la turbulence est présente, pour chaque maillage, nous déterminons le couple  $(\kappa, N_s)$  optimum pour dissiper les instabilités et cela en réalisant une série de calcul en modifiant un par un les deux paramètres précédents. C'est pour cette raison que nous avons traité un nombre limité de cas test turbulents.

### 4.8.2 Les discontinuités et les ordres élevés

Les écoulements cavitants présentent des discontinuités au niveau de l'interface liquide-vapeur. Pour voir le comportement du schéma vis à vis de ces discontinuités aux ordres élevés, on a réalisé des calculs à l'ordre 3 et 4 MLS. On

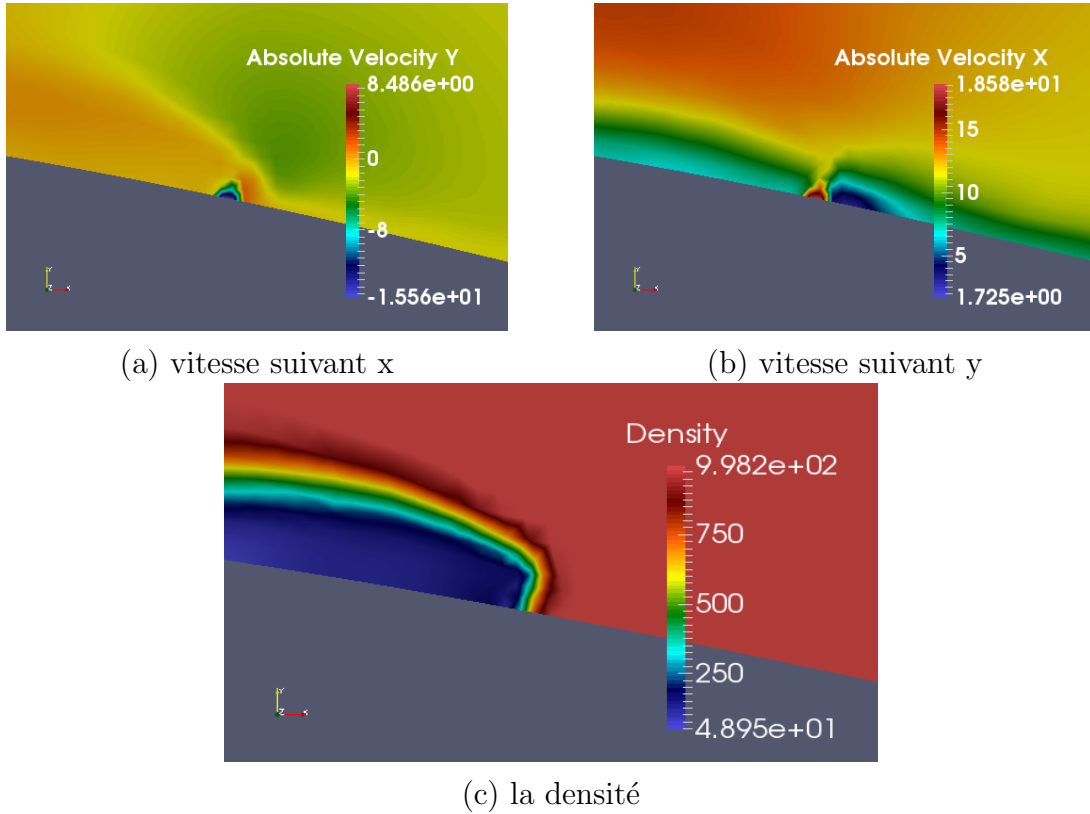


FIGURE 4.7 – Écoulement cavitant autour d'un profil d'aile. Instabilité à l'interface liquide-vapeur pendant la formation d'une poche de cavitation juste avant que le calcul diverge.

a remarqué que lorsque ces discontinuités se forment au niveau d'une paroi (voir figure 4.7), elles génèrent des instabilités impossibles à dissiper pour des ordres élevés de reconstruction MLS. Les limiteurs de pentes qui sont implémentés dans le code (limiteur de Barth et Jespersen [2] et le limiteur de venkatakrishnan [46]) sont conçus pour le traitement des chocs à Mach supersonique. D'après nos calculs, ils semblent être inadaptés aux discontinuités que l'on rencontre dans les écoulements cavitants. Pour outre passer cette difficulté, il est recommandé de développer un limiteur de pente qui permette de dissiper les instabilités qui résultent de cette discontinuité spécifique aux cas diphasique.

Dans ce genre de situation nous nous sommes limité à l'ordre 2 pour éviter les instabilités. Ce constat a été fait pour le cas de l'écoulement autour du profil d'aile et du cylindre immergé où à l'ordre 3 et 4, en observant la formation de la poche de cavitation au niveau de la paroi, on voit apparaître des instabilités au niveau de l'interface liquide-vapeur au moment où le jet rentrant commence à détacher la bulle.

### 4.8.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont imposées en utilisant des éléments fictifs. Dans le schéma 4.8,  $U_+$  est la valeur de la condition que l'on doit imposer. Dans cette approche, les flux numériques à travers la frontière sont déterminés en utilisant les solveurs de Riemann utilisés pour les mailles intérieures.

$$F_b = H(U_+, U_-) \quad (4.64)$$

où  $U_-$  est la solution extrapolée de l'intérieur du domaine,  $F_b$  le flux à travers la frontière et  $H$  le solveur de Riemann utilisé dans tout le domaine. Cette manière d'imposer les conditions aux limites est dite faible.

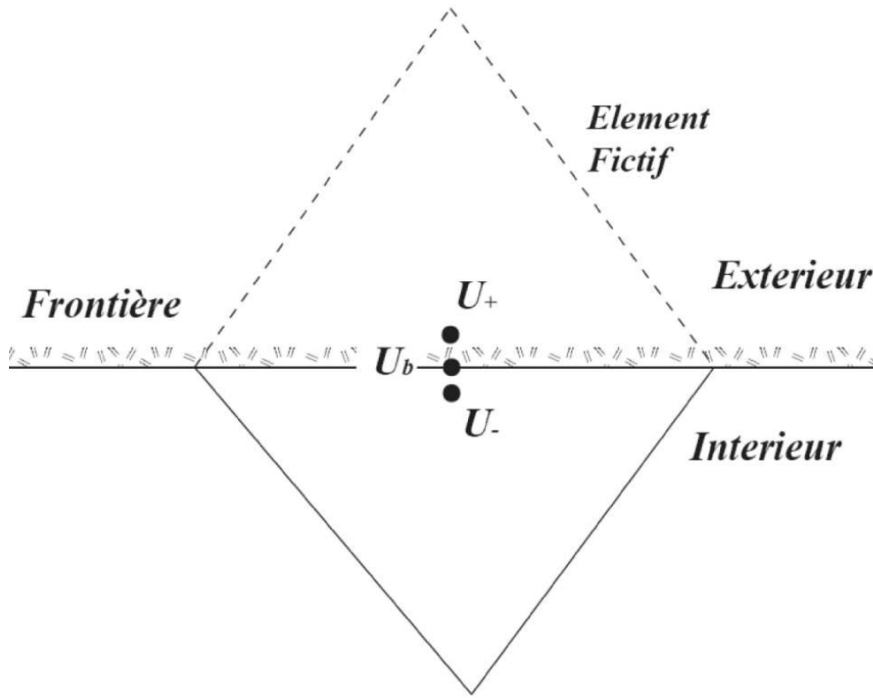


FIGURE 4.8 – Élément fictif servant à la mise en place des conditions aux limites

En ce qui concerne les conditions aux limites de Neumann, le gradient à imposer est directement injecté dans l'expression du flux concerné. Pour exemple une condition de flux de chaleur nul sur une paroi dont la normale est suivant l'axe  $Oy$  reviendrait à mettre  $q_y = 0$  dans l'expression du flux visqueux dans l'équation 4.6. L'avantage de cette méthode est que l'on impose la bonne condition de Neumann au bon endroit (directement sur l'arête). L'inconvénient est qu'il faut définir une expression du flux numérique pour chaque condition et définir des

subroutines de flux différentes suivant qu'on se trouve à l'intérieur du domaine ou sur la frontière concernée.

## 4.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons détaillé les différentes étapes de résolution des équations de conservation. On y retrouve notamment la discrétisation spatiale des variables conservatives et primitives à travers la méthode des moindres carrés mobiles. On y montre la manière dont sont calculées les dérivées spatiales en utilisant les fonctions de forme. On a fait le lien entre les fonctions Kernel exponentielles et les fonctions de forme. Nous avons insisté sur l'utilité de bien choisir le couple de coefficients  $(\kappa, N_s)$  qui jouent un rôle important dans la dissipation des instabilités et dans la précision des calculs. Dans le chapitre suivant nous présentons les résultats des calculs réalisés dans le but de valider l'implémentation de la tension de surface ainsi que les études réalisées sur l'influence de cette dernière sur le collapse et la périodicité des bulles de cavitation.



# Résultats et Discussions

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>67</b>
<b>5.2</b>	<b>Validation du modèle de tension de surface</b>	<b>68</b>
5.2.1	Cas test de la bulle à l'équilibre statique	68
5.2.2	Cas test de coalescence de deux bulles	75
5.2.3	Cas test de la goutte d'eau sur une paroi solide	78
<b>5.3</b>	<b>Étude de l'effet de la tension de surface sur le collapse d'une bulle de cavitation</b>	<b>80</b>
5.3.1	Influence de la tension de surface sur l'intensité du collapse	80
5.3.2	Étude de l'influence de la tension de surface sur la vitesse du collapse	83
<b>5.4</b>	<b>Effet de la tension de surface sur la fréquence de cavitation</b>	<b>87</b>
5.4.1	Domaine de calcul	87
5.4.2	Résultats et commentaires	89
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous présentons les résultats obtenus dans cette thèse. Ils se divisent en deux parties. La première partie consiste en un ensemble de cas test qui servent à valider l'implémentation de la tension de surface dans le code FV-MLS. Nous y montrons la capacité du code à simuler les efforts de tension de surface dans l'interface liquide-vapeur diffuse et les limites numériques du modèle physique choisi. Dans la deuxième partie, nous réalisons deux applications qui consistent en l'étude de l'effet de la tension de surface sur l'intensité du collapse d'une bulle de cavitation sur l'extrados d'un profil d'aile immergé et l'étude de l'influence de la tension de surface sur la fréquence des lâchés de bulles de cavitation et la morphologie de l'écoulement cavitant autour d'un cylindre immergé.



## 5.2 Validation du modèle de tension de surface

Afin de valider le modèle de tension de surface nous allons réaliser une série de cas test qui mettent en avant les effets de la force de tension de surface.

### 5.2.1 Cas test de la bulle à l'équilibre statique

Lorsqu'on porte de l'eau à ébullition dans une casserole, on observe la formation de bulles de vapeur sur le fond chaud de cette dernière. Ces bulles grandissent jusqu'à ce que la force d'Archimède les décolle de la surface. C'est ce qui se rapproche le plus d'une bulle de vapeur à l'équilibre statique. Si l'on néglige la force de gravitation et que l'on met initialement une bulle de vapeur dans de l'eau à la pression de saturation. L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit comme suit :

$$\nabla p = \lambda \rho \nabla \Delta \rho \quad (5.1)$$

On néglige le terme visqueux car les vitesses sont nulles. La formule 5.1 montre que le gradient de pression est nul partout sauf à l'interface liquide-vapeur. Donc, la tension de surface provoque une surpression dans la bulle de vapeur. Pour observer ce phénomène on utilise le cas test suivant de l'équilibre statique.

Comme le montre la figure 5.1, le domaine de calcul est un carré de coté  $L = 1m$ . La pression initiale  $P_i = P_{sat}(T)$  et la température  $T = 295K$ . La densité est donnée par la formule 5.2, cette formule permet d'avoir une variation continue de la densité à travers l'interface. Elle correspond au profil de densité utilisé dans la section 3.4.3 dont l'expression est donnée par l'équation 3.68. La figure 5.1 montre que l'épaisseur de l'interface liquide-vapeur équivaut à deux cellules du maillage.

$$\rho_0 = \frac{\rho_l + \rho_v}{2} + \frac{\rho_l - \rho_v}{2} \left( \tanh \left( \frac{(d - R)L_0}{2h} \right) \right) \quad (5.2)$$

Avec :  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et l'épaisseur de l'interface  $h = (1/200)m$  correspond à la largeur d'une cellule. On utilise un maillage uniforme de  $200 \times 200$ . Les conditions aux limites sont données ci après :

$$u = v = 0 \quad \rho = \rho_l \quad (5.3)$$

sur la frontière du domaine.

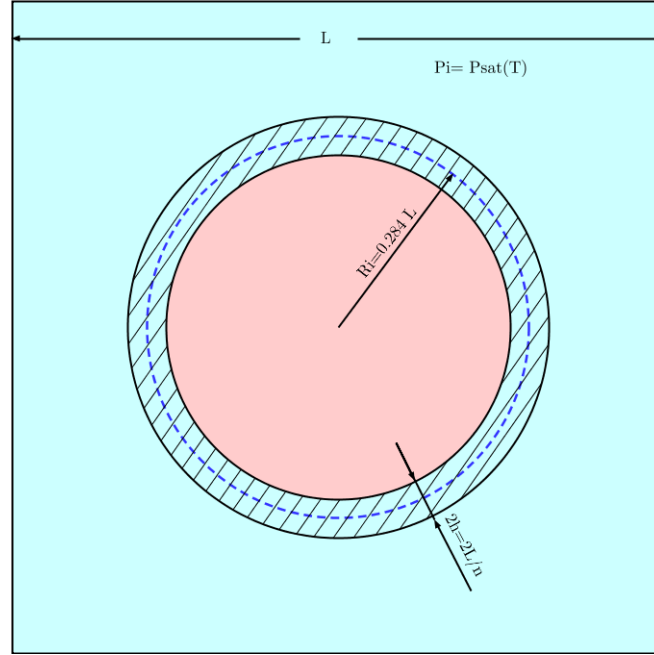


FIGURE 5.1 – Schéma du cas test d'équilibre statique, avec  $n$  le nombre de mailles sur un coté du carré

### 5.2.1.1 Calcul addimensionnel isotherme avec l'équation d'état de Van Der Waals

On réalise ce cas de figure pour pouvoir comparer avec les résultats obtenus par H. Gomez [16] qui utilise un code de calcul addimensionnel isotherme avec l'équation d'état de Van Der Waals. Les paramètres addimensionnels du calcul sont : le nombre de Reynolds  $Re = 2/C_a$  et le nombre capillaire  $C_a = \frac{h}{L}$ . On utilise l'équation de Van Der Waals addimensionnelle décrite par l'équation 3.26. Les paramètres d'addimensionnement sont donnés dans la section 3.3.4.3. Le pas de temps est  $\Delta t = 10^{-4}$  (le pas de temps est lui aussi sans dimension).

La figure 5.2 représente le champs de pression pour l'état initial et l'état final. Ce qui nous intéresse c'est le gradient de pression entre le centre de la bulle et l'extérieur de la bulle. Ce gradient passe de  $2.06 \cdot 10^{-4}$  pour  $t = 0$  à  $3.1 \cdot 10^{-3}$  pour  $t = 10$ . Après un temps de calcul de  $t = 5$  les variables se stabilisent et ne changent quasiment pas.

La figure 5.3 représente la distribution des vitesses suivant l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$ . Si on voit l'intensité de ces vitesses on remarque qu'elle sont de l'ordre de  $10^{-3}$  et elle continue de baisser. Ces résidus de vitesse diminuent avec l'épaisseur de l'interface liquide vapeur. Néanmoins, si on les compare aux valeurs du cas test de référence de l'article [16] on trouve qu'elle sont bien inférieures ce qui constitue

un résultat positif.

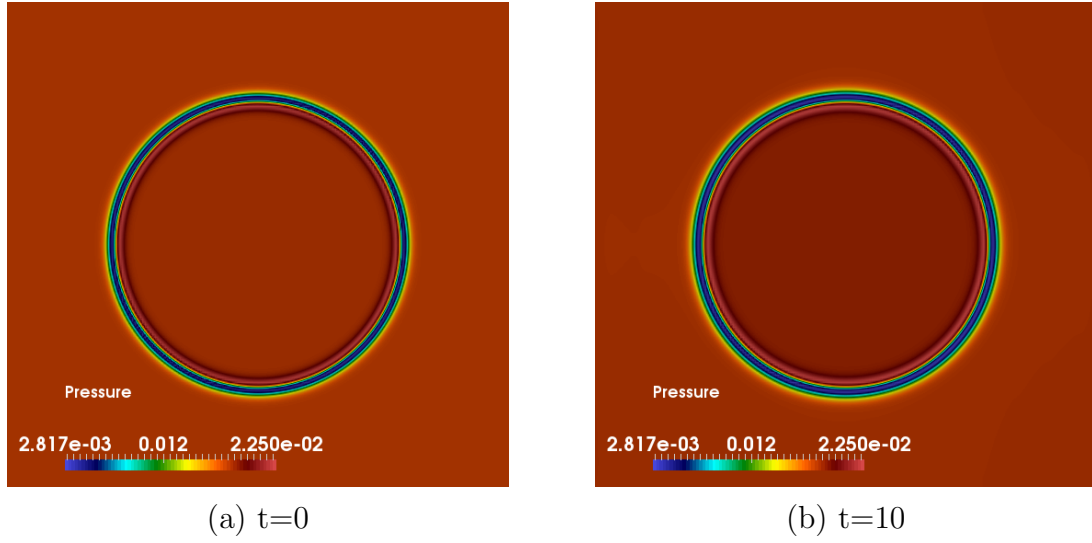


FIGURE 5.2 – La pression dans une bulle statique estimée par l'équation de Van Der Waals addimensionnelle

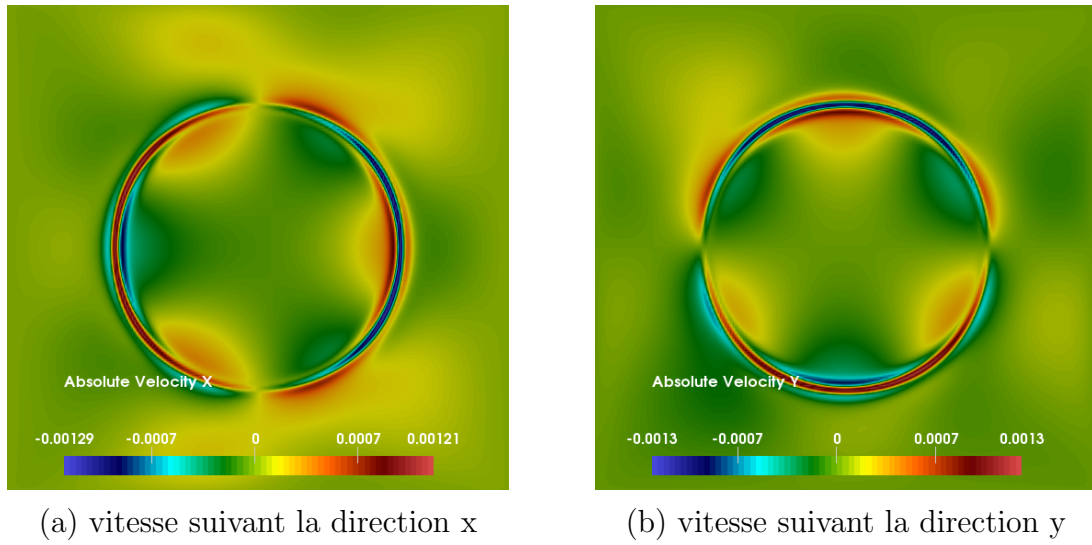


FIGURE 5.3 – la distribution des vitesses suivant l'axe des x et l'axe des y à t=10

La figure 5.4 représente l'évolution de l'énergie totale dans tout le domaine au cours du calcul. L'expression de l'énergie totale est donnée par la formule tirée de l'article [16]. Elle est donnée par l'équation 5.4 :

$$\check{E} = \int_{\Omega} \left( \check{W}(\check{\rho}) + \frac{1}{2} C_a^2 |\check{\nabla} \check{\rho}|^2 + \frac{1}{2} |\check{u}|^2 \right) d\Omega \quad (5.4)$$

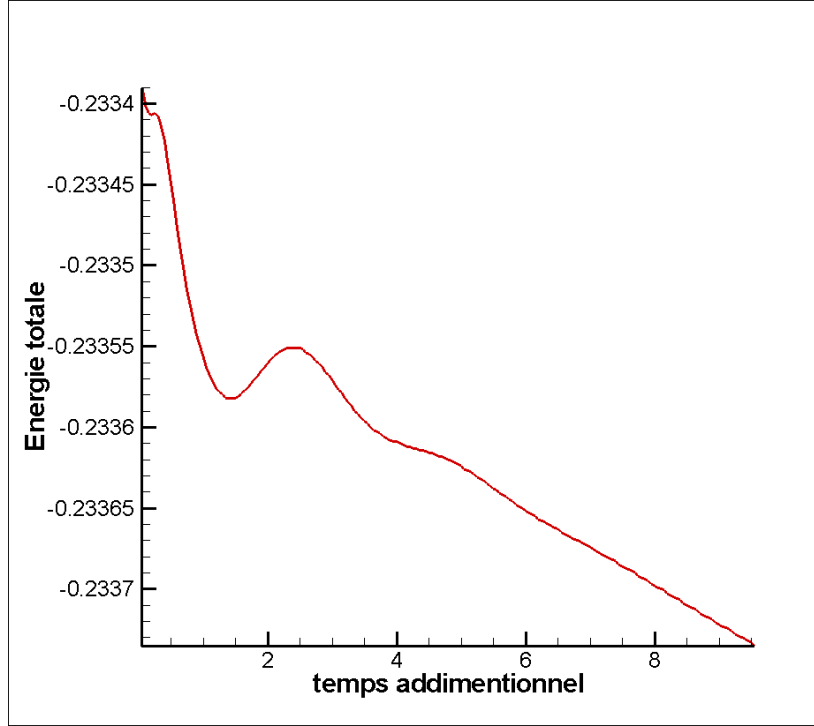


FIGURE 5.4 – Évolution de l'énergie totale pour le cas test de la bulle statique au cours du temps

avec

$$\check{W}(\check{\rho}) = \frac{8}{27} \check{T} \check{\rho} \log \left( \frac{\check{\rho}}{1 - \check{\rho}} \right) - \check{\rho}^2 \quad (5.5)$$

L'énergie devrait diminuer de manière monotone. Sur la figure 5.4, on voit qu'entre  $t = 1.5$  et  $t = 3$  elle augmente puis reprend sa diminution. En repassant le calcul on a remarqué qu'une onde de vitesse est générée au départ au niveau de l'interface liquide-vapeur, elle se déplace vers les parois puis elle est réfléchiée. Ce pic correspond à l'arrivée de l'onde au niveau de l'interface. Ensuite la vitesse diminue au niveau de l'interface et l'onde se dissipe. La raison est que l'on n'a pas utilisé les mêmes conditions aux limites que dans le cas test qui sont des conditions aux limites périodiques.

### 5.2.1.2 Calcul dimensionnel isotherme avec l'équation d'état du modèle homogène

Dans cette section, nous allons appliquer le cas test de la bulle à l'équilibre statique au modèle homogène développé dans cette thèse. Nous utilisons les équations de Navier-Stokes & Korteweg isothermes sous leurs formes dimensionnelles

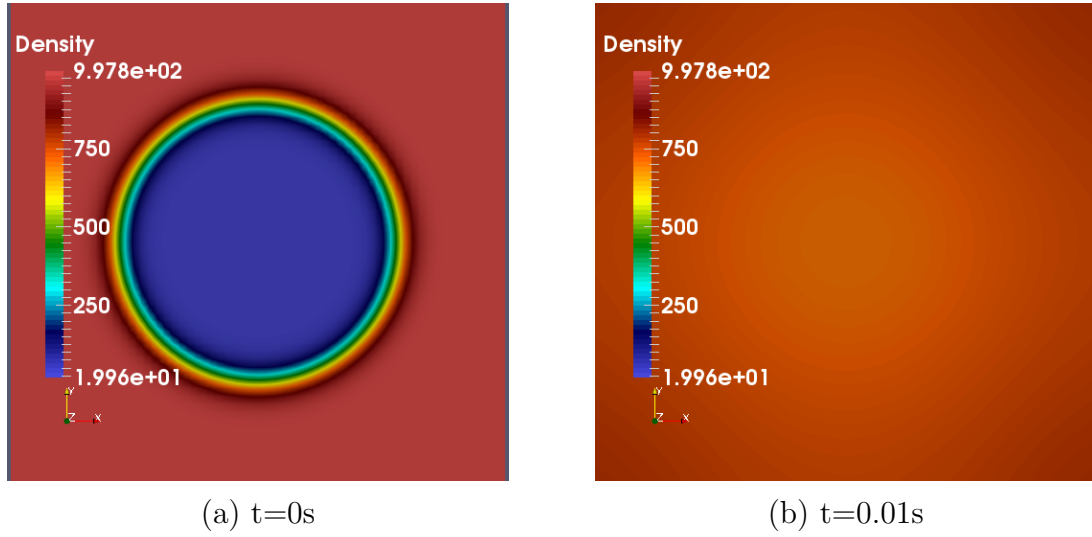


FIGURE 5.5 – La densité pour le cas test de l'équilibre statique  $\lambda = 4 \cdot 10^{-9}$

combinées aux équations d'état du modèle homogène d'équilibre, voir la section 3.3.4.4.

Pour ce calcul on a utilisé un maillage de  $64 \times 64$ , une viscosité de  $\mu = 59.34 Pa.s$  et un coefficient capillaire  $\lambda = 4 \cdot 10^{-9} m^7 kg^{-1} s^{-2}$ , ce qui correspond à une tension de surface  $\sigma = 0.072 N/m$ . On impose une température initiale de  $295K$  et la pression  $p = p_{sat}(T) = 2623 Pa$ . Pour la densité on utilise la formule en tangente hyperbolique suivante :

$$\rho = 997.8 \left( 0.51 - 0.49 \tanh \left( (\sqrt{x^2 + y^2} - R_0) 32 \right) \right) \quad (5.6)$$

La densité dans la bulle est de  $19.96 kg/m^3$ , alors qu'à cette température la densité de la vapeur pure est de  $0.01924 kg/m^3$ . La raison pour laquelle nous n'avons pas imposé une densité de vapeur pure dans la bulle est que le code ne supporte pas un tel gradient de masse volumique. Rappelons que la masse volumique de la vapeur d'eau à température ambiante ( $295K$ ) est 10000 fois plus petite que celle de l'eau liquide.

La figure 5.5 montre que la bulle c'est totalement condensée. Cela s'explique par le fait qu'il n'y a pas de force qui vienne s'opposer à la force de tension de surface. Si l'on regarde la courbe de l'équation d'état du modèle homogène, on voit que dans l'intervalle de densité  $[19.96, 997.8]$  la pression est égale à la pression de saturation à la température  $T$ . Puisque ce calcul est isotherme cette pression est constante dans tout le domaine et tout le temps du calcul. Donc il ne peut y avoir de gradient de pression qui compenserait la force de tension de surface comme l'annonce la condition d'équilibre.

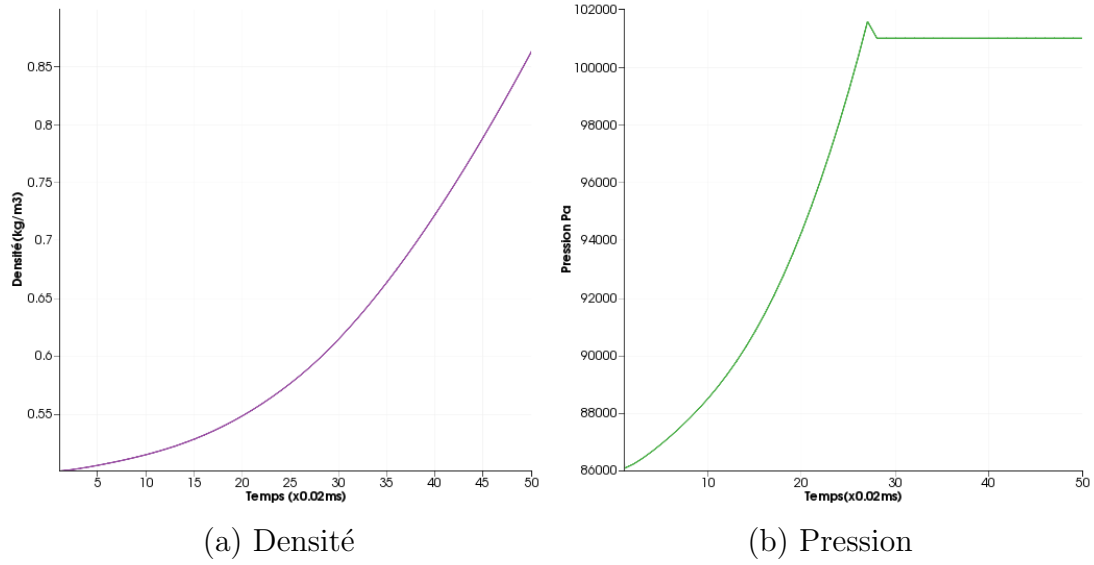


FIGURE 5.6 – Évolution au cours du temps de la densité et de la pression au centre de la bulle pour le cas test de l'équilibre statique  $\lambda = 4 \cdot 10^{-9}$  isotherme avec  $T = 373K$ .

On est en droit de se poser les questions suivantes :

- Est ce que les équations d'état du modèle homogène sont inadaptées ?
- L'hypothèse d'écoulement isotherme est non valide ?

Pour pouvoir répondre aux questions posées, nous allons réaliser un calcul de même nature mais en utilisant une température plus élevée. Le but est de diminuer l'écart de densité entre la vapeur et le liquide et ainsi pouvoir se mettre dans les conditions réelles de calcul. C'est à dire avoir de la vapeur pure dans la bulle.

En reprenant la même géométrie et le même domaine de calcul avec une température  $T = 373K$ . La pression de saturation  $p_{sat} = 100999Pa$  et les densité liquide et vapeur sont respectivement de  $\rho_l = 958.5kg/m^3$  et  $\rho_v = 0.59kg/m^3$ . Nous appliquons la condition initiale suivante pour la densité :

$$\rho = 479.5 - 479 \tanh \left( (\sqrt{x^2 + y^2} - R_0) 32 \right) \quad (5.7)$$

La densité atteint dans la bulle une valeur de  $0.5kg/m^3$ . Elle est inférieure à la densité de saturation vapeur, on est donc à 100% de vapeur.

La figure 5.6 nous montre l'évolution de la densité et de la pression au centre de la bulle au cours du temps. On voit très bien que les efforts de tension de surface, en comprimant la bulle, font augmenter la densité et la pression du moins jusqu'au temps  $t = 0.54ms$ . A cet instant précis, la densité atteint sa

valeurs de saturation par conséquent, la pression ne varie plus en fonction de la loi d'état des gaz parfaits mais devient constante et égale à la pression de saturation comme le montre la deuxième partie de la figure de droite 5.6.b.

En poursuivant le calcul on obtient le même résultat que pour le calcul précédent. C'est à dire une condensation de la bulle.

## Conclusion

Les équations d'état du modèle homogène ne permettent pas de simuler l'équilibre statique d'une bulle dans le cas isotherme.

On voit à travers ce calcul que pour notre modèle, il est nécessaire de considérer l'équation de conservation de l'énergie. Si en isotherme la force de tension de surface ne génère pas de gradient de pression ce n'est pas le cas en non-isotherme car la compression initialement engagée dans la phase vapeur pure va générer une augmentation de la température. Cette dernière provoque une augmentation de la pression de saturation. Donc, la pression à l'intérieur de la bulle continuera à suivre la courbe des gaz parfaits et pourra dépasser la pression de saturation à l'extérieur de la bulle où la température est moins élevée. Par conséquent un gradient de pression sera généré et l'équilibre devient possible (la bulle se rétractera jusqu'à l'équilibre).

Pour vérifier cela nous réalisons un calcul avec l'équation de conservation de l'énergie dans la section 5.2.1.3.

### 5.2.1.3 Calcul dimensionnel avec l'équation de conservation de l'énergie et les équations d'état du modèle homogène

Dans cette section nous réalisons un calcul de l'équilibre statique d'une bulle de vapeur immergée dans l'eau en négligeant la gravitation. On utilise une viscosité de  $\mu = 59.34 Pa.s$  et un coefficient capillaire  $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-6} m^7 kg^{-1} s^{-2}$  ce qui correspond à une tension de surface de  $\sigma = 65 N/m$ . On a choisi une tension de surface relativement grande pour pouvoir observer une différence de pression entre le centre de la bulle et l'extérieur. On impose une température initiale de  $295 K$  et la pression  $p = p_{sat}(T) = 2623 Pa$ . Pour la densité on utilise la formule en tangente hyperbolique explicitée dans l'équation 5.6.

Le maillage utilisé est le même que dans la section 5.2.1.1. Le pas de temps  $\Delta t = 10^{-7} s$ . Dans ce calcul on prend en compte l'équation de conservation de l'énergie. Contrairement au cas isothermes précédents, même si dans tout le domaine le fluide obéit à l'équation d'état du mélange ( $0 < \alpha < 1$ ) 3.32, il est tout de même possible d'avoir une compression car la température peut varier et de même pour la pression de saturation. Cette compression de la bulle pendant

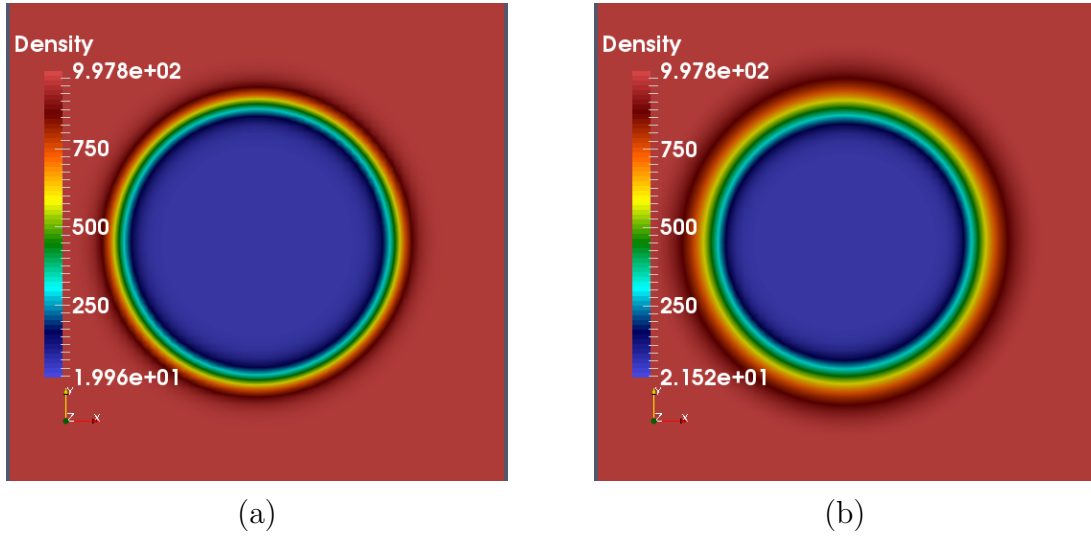


FIGURE 5.7 – La densité pour le cas test de l'équilibre statique  $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-6}$  : (a) état initial. (b) Résultat final

la phase où elle se contracte va, à un certain moment, contre-carrer la force de tension de surface et on aboutit à un équilibre dynamique des forces.

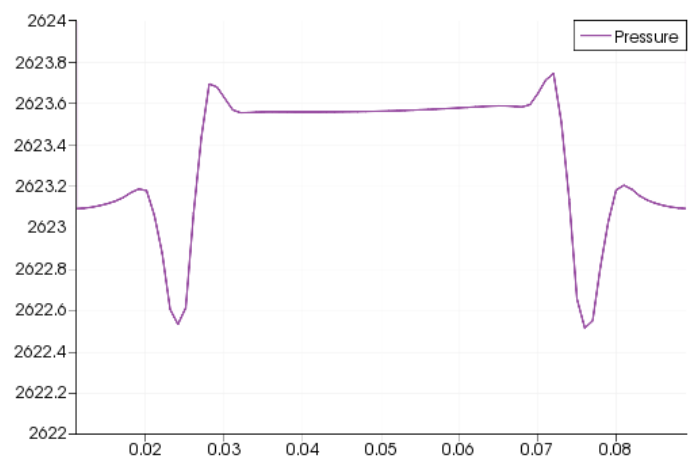
On observant la distribution de la densité entre l'état initial et l'état final, on remarque que l'épaisseur de l'interface liquide-vapeur augmente. Le rayon de la bulle diminue légèrement. On remarque aussi que la densité au centre de la bulle augmente.

La figure 5.8 montre l'évolution sur l'axe  $Ox$  de la pression et de la température sous l'effet de la force de tension de surface. Comme prévu, le terme de Korteweg génère un gradient de pression qui se maintient grâce à la différence de température entre le centre de la bulle et le liquide.

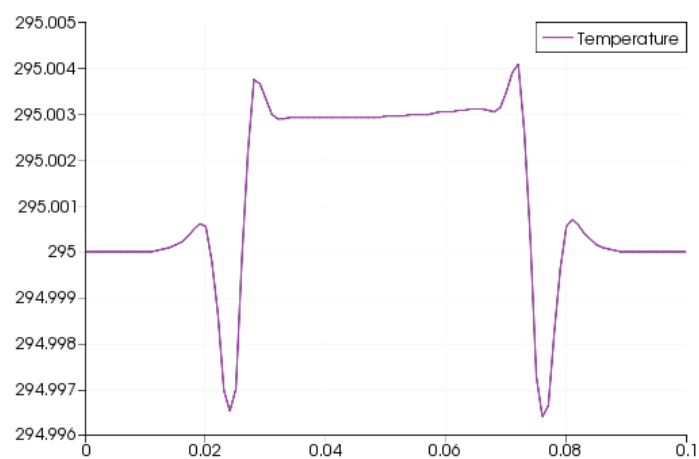
### 5.2.2 Cas test de coalescence de deux bulles

Ce cas test a pour but de valider le code de calcul pour simuler les changements de topologie. En mettant deux bulles de vapeurs séparées d'une distance de l'ordre de l'épaisseur de l'interface liquide-vapeur et en négligeant les autres forces (notamment la gravité terrestre), la force de tension de surface tend à les fusionner. Cela se produit parce que l'énergie potentielle de la bulle fusionnée est plus faible que celle des deux bulles initiales. On parle de l'énergie surfacique due aux attractions intermoléculaires. Cette dernière est proportionnelle à la surface et le minimum de surface qui peut contenir un certain volume étant une bulle (sphère en 3d) la bulle fusionnée correspond à un minimum énergétique. C'est le phénomène inverse qui se produit lorsqu'une goutte d'eau tombe sur le sol.

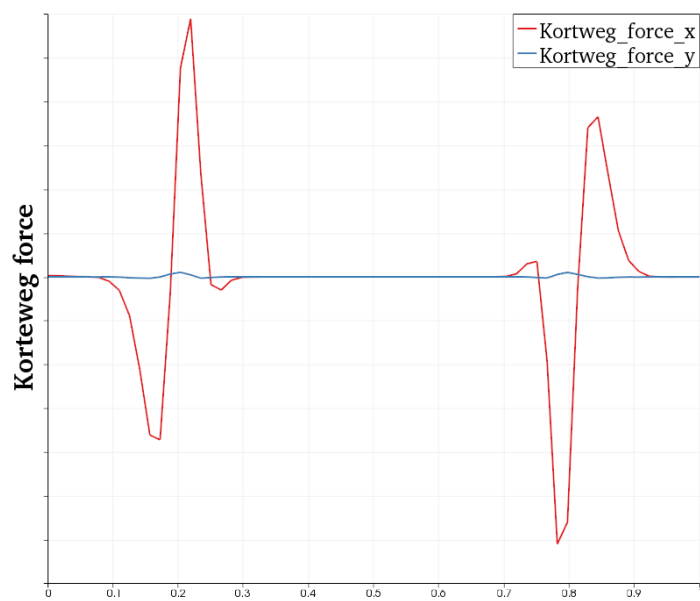




(a)



(b)



(c)

FIGURE 5.8 – tracé sur l'axe  $y=0$  des variable à l'équilibre  $\lambda = 1.5 \cdot 10^{-6}$  : (a) Pression. (b) Température. (c) force de tension de surface

Le choc transmet de l'énergie à la goutte. Cet excès d'énergie rompt les liaisons intramoléculaires et génère plusieurs gouttelettes dont la surface globale est proportionnelle à l'énergie transmise par le choc.

Les paramètres de calcul sont les mêmes que pour le cas de l'équilibre statique de la section 5.2.1.1 (avec un maillage de  $200 \times 200$ ). Les rayons initiaux des deux bulles sont respectivement de 0.25 et de 0.1. Nous rappelons que nous utilisons le code addimensionnel.

La figure 5.9 montre l'évolution de la densité lors de la coalescence de deux bulles de vapeur. On retrouve bien au final une bulle unique qui a la surface des deux bulles initiales.

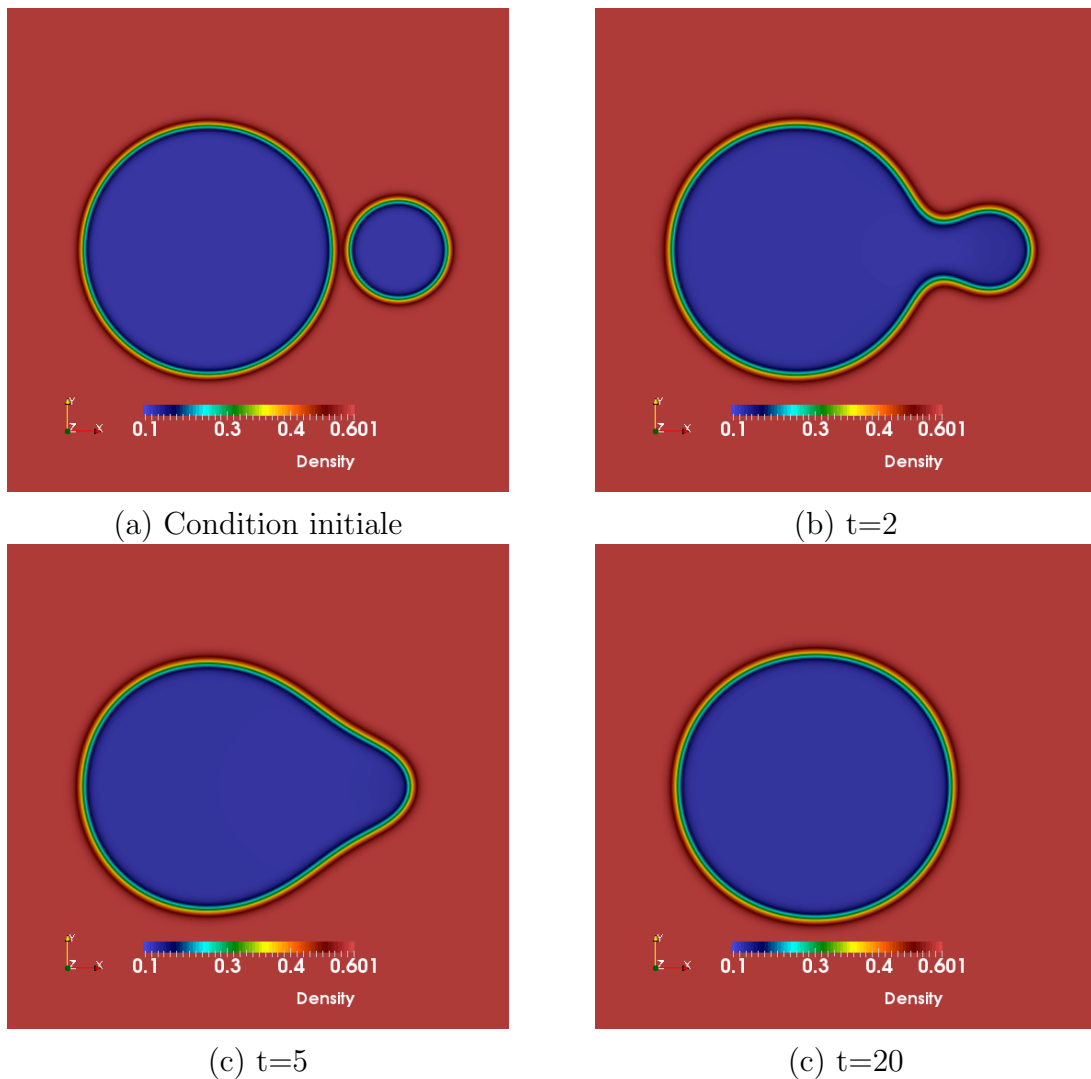


FIGURE 5.9 – la distribution de densité addimensionnelle pour le cas test de la coalescence de deux bulles : (a) état initial. (b) à  $\tilde{t} = 2$ . (c) à  $\tilde{t} = 5$ . (d) état final

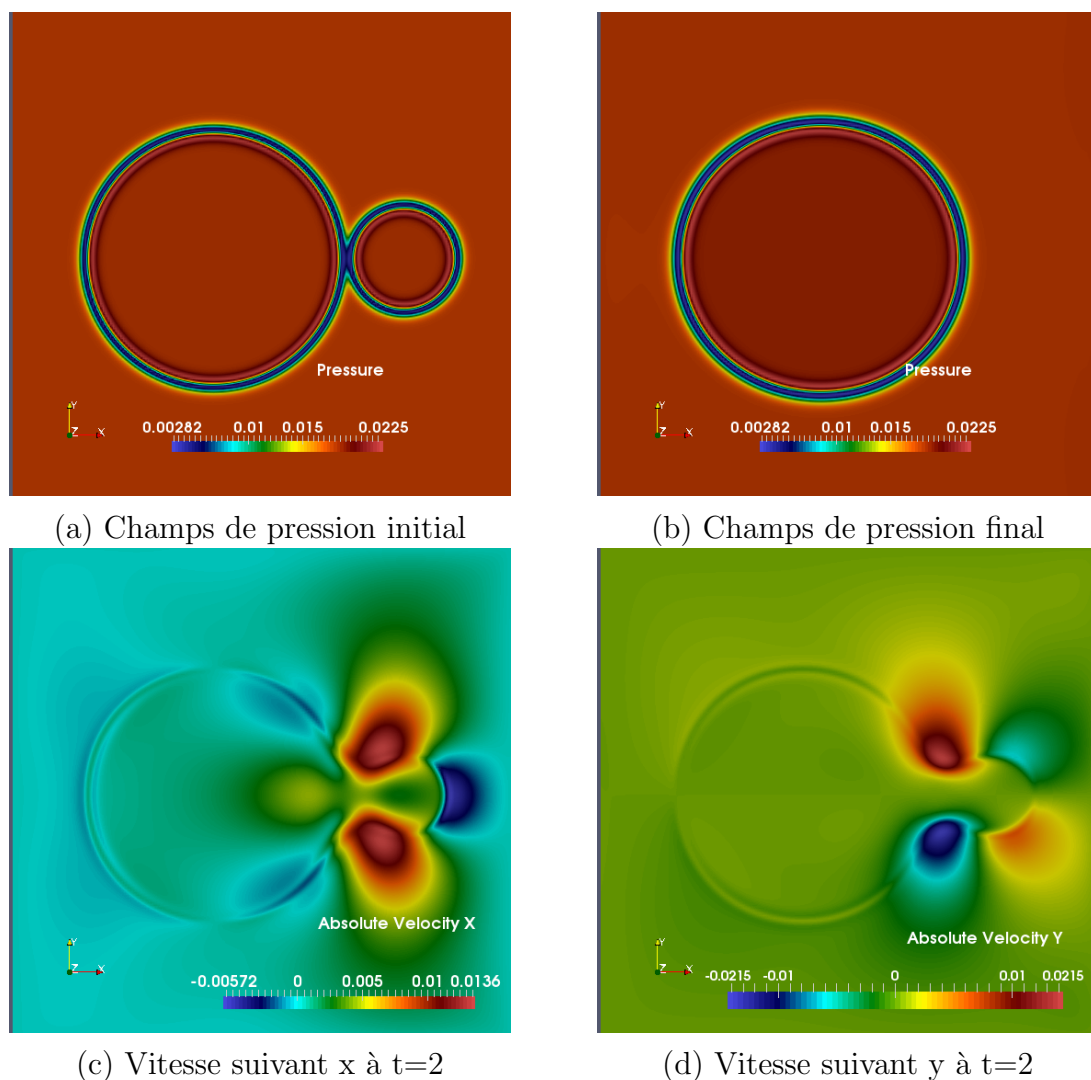


FIGURE 5.10 – la pression et la vitesse addimensionnelles dans le cas de la coalescence de deux bulles

La figure 5.11 montre l'évolution de l'énergie totale au cours du temps. On remarque que l'énergie diminue jusqu'à atteindre une valeur minimale signe que le calcul a bien convergé.

### 5.2.3 Cas test de la goutte d'eau sur une paroi solide

Dans cette section nous réalisons le cas test de l'article [33] qui simule le mouillage d'une goutte de liquide sur un solide. Le but est de reproduire la forme de la goutte à l'équilibre qui dépend de deux facteurs : la force de gravitation à travers le nombre de Bond et l'angle de mouillage. On utilise un angle de

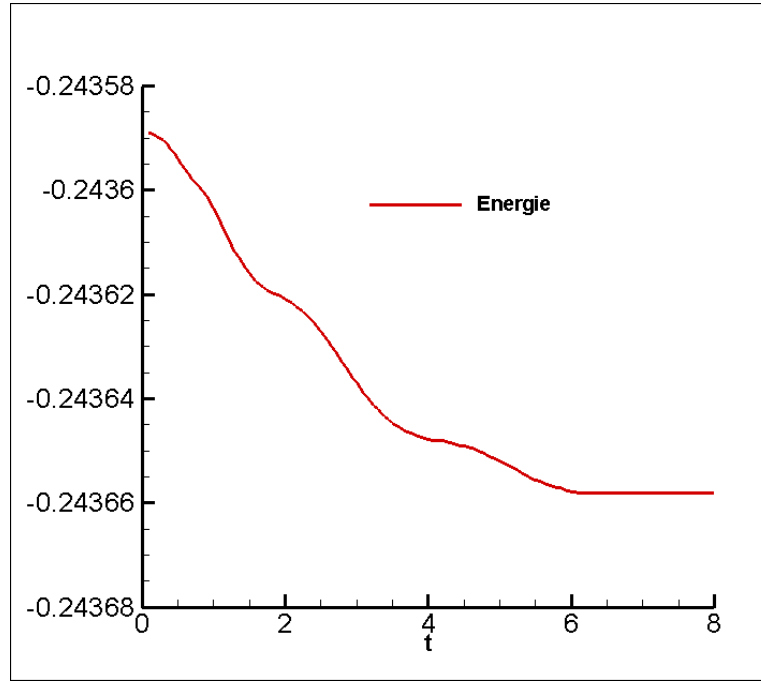


FIGURE 5.11 – Évolution de l'énergie totale au cours du temps pour le cas test de la coalescence

mouillage de  $90^\circ$  ce qui correspond dans notre code à une condition aux limites de non glissement. Rappelons que le nombre de Bond compare la force de gravitation à la force de tension de surface. Plus ce nombre est faible, plus la goutte tend à être de forme circulaire.

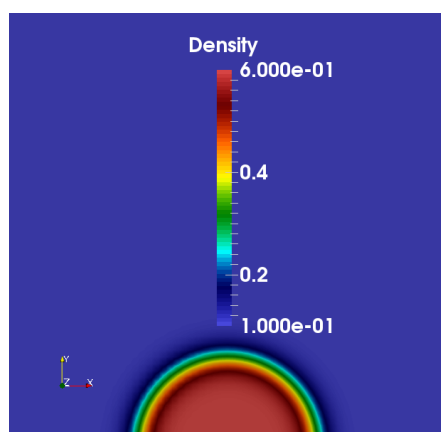
Les paramètres de calcul sont les suivants : nous utilisons la forme addimensionnelle des équations de conservation et d'état. Le domaine est un carré de côté  $L_0 = 1$  et centré en  $(0, 0)$ . Nous utilisons un maillage de  $64 \times 64$ . Ce qui donne un  $Ca = 15.625 \cdot 10^{-3}$  et un  $Re = 180$ . La condition initiale pour la densité est exprimée par la formule suivante :

$$\rho_0 = 0.35 + 0.25 \tanh \left( \frac{\sqrt{x^2 + (y + 0.5)^2} - R}{2Ca} \right) \quad (5.8)$$

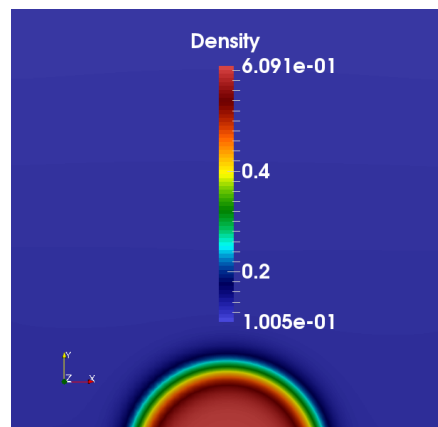
Pour reprendre les notations de l'article [33], la force de gravitation est nommée  $f$  et pointe dans la direction négative de l'axe Oy. Pour le premier maillage nous utilisons  $f = 10^{-3}$  et  $5 \times 10^{-3}$ .

Pour ce calcul nous avons utilisé le couple de paramètres MLS suivant :  $(\kappa, N_s) = (6, 10)$ . Comme prévu, plus le nombre de Bond est élevé plus la goutte s'aplatit. Par contre, en observant la forme des bulles et l'angle de contact qu'elles forment avec la paroi (C'est plus net sur la figure 5.12.(b)), on remarque qu'il

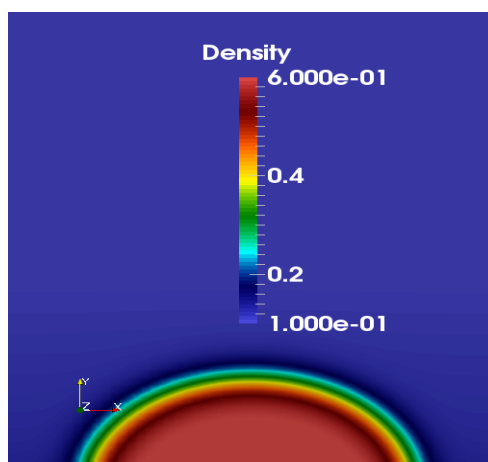
n'est pas égale à  $90^\circ$ . La condition aux limite sur l'angle de contact est mal posée.



(a) La densité à l'état initial



(b) La densité à  $t=20$  et  $f=0.001$



(c) la densité à  $t=20$  et  $f=0.005$

FIGURE 5.12 – l'aplatissement de la goutte d'eau sous l'effet de différentes valeurs de la force de gravité

## 5.3 Étude de l'effet de la tension de surface sur le collapse d'une bulle de cavitation

### 5.3.1 Influence de la tension de surface sur l'intensité du collapse

Pour étudier l'influence de la tension de surface sur l'intensité du collapse. On considère le cas test de Sauer [42] qui décrit un écoulement cavitant turbulent

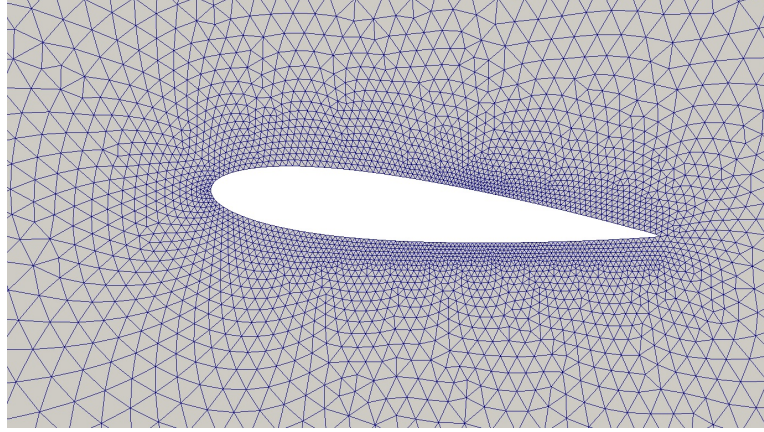


FIGURE 5.13 – Vue rapprochée du maillage autour du profil NACA0015

autour d'un profil immergé NACA0015 avec un angle d'attaque  $\tilde{\alpha} = 6^\circ$ . On se focalise sur le collapse de la première bulle de cavitation, qui est une bulle numérique (voir figure 5.14) générée par le contraste entre les conditions aux limites de non glissement sur le profil et la condition initiale de vitesse  $u_\infty = 12m/s$ . Cette bulle se forme et collapse sur l'extrados au alentours de  $t = 4ms$ .

Le domaine de calcul est en forme de O . La corde du profil vaut  $0.15m$  et le diamètre du domaine de calcul  $D = 10m$ . Nous avons utilisé un maillage non structuré de 9578 éléments triangulaires très fins au niveau du profil et grossiers sur la limite externe du domaine. Le coefficient capillaire  $\lambda$  est calculé à partir de la tension de surface  $\sigma$  en utilisant l'équation 3.73 où  $L_0 = C = 0.15m$  et l'épaisseur de l'interface est déterminée par la relation suivante :

$$h = \sqrt{\bar{A}} \quad (5.9)$$

où  $\bar{A}$  est la surface moyenne des cellules autour du profil d'aile, voir la figure 5.3.1.

### 5.3.1.1 Conditions aux limites et conditions initiales

En ce qui concerne les conditions initiales, on impose la pression, la vitesse et la température à partir des quelles les autre grandeurs (densité, vitesse du son, énergie etc) sont calculées. La vitesse de l'écoulement  $u_\infty = 12m/s$ . La pression initiale  $p_0 = 50000Pa$  dans tout le domaine de calcul. Cela correspond à un nombre de cavitation de  $\sigma_c = 0.66$ , la température  $T_0 = 293K$ . On considère initialement dans tout le domaine de l'eau à l'état liquide dont la densité est déterminé par une formule tirée de l'équation d'état de Tait modifiée, elle est exprimée ci dessous :

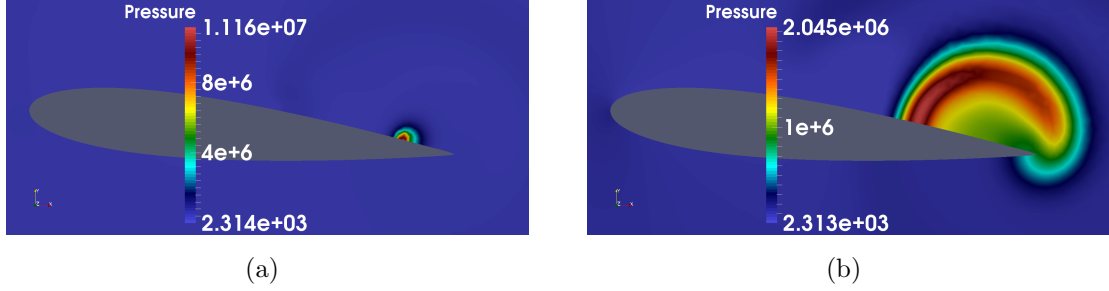


FIGURE 5.14 – (a) Pression maximale atteinte lors du collapse (Pa), (b) Onde de pression générée par le collapse (Pa)

$$\rho_0 = \rho_{l,sat}(T_0) \left( \frac{p_0 - p_{sat}(T_0)}{K_0} + 1 \right)^{\frac{1}{N}} \quad (5.10)$$

La vitesse du son initiale est celle du liquide aux condition de température et de pression définies précédemment La formule utilisée se trouve dans le tableau 3.1

On obtient les valeurs suivantes :  $\rho_0 = 998.2 kg/m^3$  et  $c_0 = 1538 m/s$ .

On applique une condition de non glissement sur le profil submergé et une condition de champs lointain sur la frontière extérieur du domaine. Les conditions aux limites sont résumées ci après :

- Condition de non glissement :

$$(u, v) = (0, 0); \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (5.11)$$

- Condition du champs lointain :

$$u = 12 m/s; \quad p = p_0; \quad \rho = \rho_0 \quad (5.12)$$

Les paramètres numériques sont les suivants :  $(\kappa, Na) = (7, 15)$ ,  $l'ordre = 3$ ; Solveur temporel Euler explicit avec un pas de temps fixe  $\Delta t = 10^{-8} s$ ; Solveur de Riemann : SLAU modifié.

$\lambda$  est déterminée à partir de  $\sigma$  en utilisant l'équation 3.73 en prenant  $L_0 = corde = 0.15 m$ .

Pour être sûr de capturer la pression maximale, on réalise une sauvegarde toute les  $10^{-6} s$ . Pour différentes valeurs de la tension de surface  $\sigma$  on trace le maximum de pression sur la figure 5.15

### 5.3.1.2 Commentaires et discussion

Le graphe 5.15 montre qu'une augmentation de la tension de surface provoque une augmentation du pic de pression. L'effet de la tension de surface devient

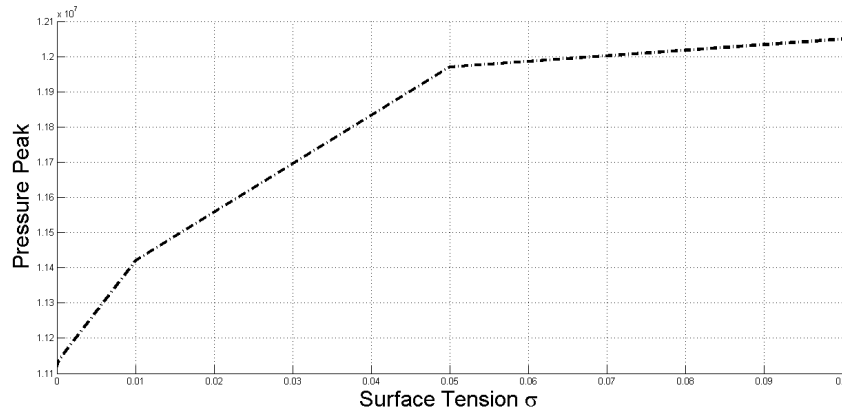


FIGURE 5.15 – Variation de l'intensité du collapse en fonction de la tension de surface

important à partir de  $\sigma = 0.01 N/m$ . Au delà d'une certaine valeur l'augmentation du pic de pression n'est pas net. Pour une tension de surface élevée, on a observé que la bulle de cavitation reste attachée à la paroi et ne collapse que longtemps après et l'intensité de ce dernier est moindre. On observe donc un changement radicale dans la topologie de l'écoulement.

### 5.3.2 Étude de l'influence de la tension de surface sur la vitesse du collapse

Pour étudier l'influence de la tension de surface sur la vitesse du collapse, nous étudions le cas du collapse d'une bulle de cavitation auquel s'applique une pression atmosphérique. Nous nous sommes inspiré du cas de l'effondrement d'une bulle de vapeur tiré des références [31] et [47]. Ce cas test est traditionnellement utilisé pour valider les modèles à interface discrète (où l'interface liquide-vapeur est une discontinuité sur laquelle on applique les conditions de saut). Donc il n'est pas adapté pour les modèles à interface diffuse. Nous y avons inclus les modifications suivantes :

- La densité initiale de la vapeur d'eau est égale à  $2.062 kg/m^3$  au lieu de  $0.019 kg/m^3$ . C'est une contrainte numérique car le schéma numérique utilisé ne peut pas supporter un tel gradient de densité.
- Contrairement au cas test, le liquide et sa vapeur sont compressibles.

Ce cas test consiste à mettre une bulle de vapeur dans un liquide à pression élevée et observer son implosion. Les variables à déterminer sont la densité au milieu de la bulle ainsi que la vitesse de l'interface liquide-vapeur.

L'utilité de ce calcul est d'observer l'effet de l'augmentation du coefficient



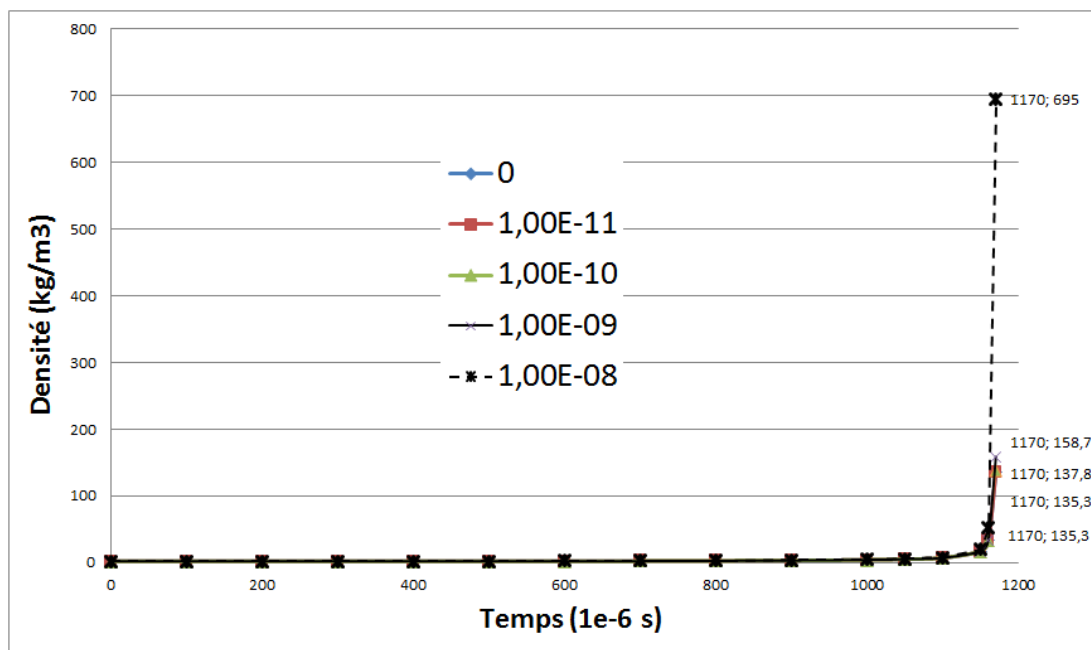


FIGURE 5.16 – L'évolution de la densité au centre de la bulle pour différentes valeurs du coefficient capillaire  $\lambda$  (entre 0 et  $10^{-8}$ )

capillaire  $\lambda$  sur la densité et la vitesse de contraction de la bulle de cavitation tout en évitant le changement de topologie causé par l'existence d'une paroi comme c'est le cas dans le calcul précédent. Pour ce faire nous réaliserons une série de calculs sur le collapse de la bulle en modifiant la valeur du coefficient capillaire  $\lambda$ .

Les paramètres de calcul et les conditions initiales sont résumés dans le tableau 5.1.

**Tableau 5.1** Les paramètres de calcul pour le cas test du collapse d'une bulle de vapeur

$\rho_l$ (kg/m³)	$\rho_v$ (kg/m³)	$p_l$ (kPa)	$p_v$ (kPa)	$\sigma$ (N/m)	$T_i$ (K)	$R_i$ (mm)
997.8	2.062	100	2.62	0.072	295	5

### 5.3.2.1 Commentaires et discussions

La figure 5.16 montre l'évolution de la densité au centre de la bulle pour des valeurs du coefficient capillaire  $\lambda$  inférieures à  $10^{-8}$ . Dans cette plage de valeurs de  $\lambda$  les courbes de densité sont les mêmes et ne se différencient qu'au stade final

du collapse quand le rayon de la bulle est très petit ( $< 1mm$ ). Autrement dit, la contraction de la bulle entre  $R = 5mm$  et  $R = 1mm$  se passe de la même manière pour  $\lambda = 0$  ainsi que pour  $\lambda = 10^{-11}, 10^{-10}, 10^{-9}$  et  $10^{-8}$  et la différence n'est visible que pour le dernier stade du collapse. Cela s'explique par le fait que la force de tension de surface est proportionnelle au rayon de courbure. Donc, dans la dernière mesure de la densité on remarque que plus le coefficient  $\lambda$  est élevé et plus la densité au centre de la bulle augmente. De même pour la vitesse de l'interface liquide-vapeur qui augmente de manière équivalente pour toutes ces valeurs du coefficient  $\lambda$  dans le premier stade du collapse. La différence ne se fait remarquer que lors de la dernière sauvegarde où l'on observe une vitesse augmentant en fonction du coefficient capillaire, voir le tableau 5.2.

**Tableau 5.2** La vitesse à l'interface liquide-vapeur pour le dernier stage du collapse

$\lambda$ $m^7/kg s^2$	Vitesse $m/s$
0	23.2
$10^{-11}$	23.24
$10^{-10}$	23.89
$10^{-9}$	32
$10^{-8}$	38.54

La figure 5.17 montre l'évolution de la densité au centre de la bulle pour des valeurs du coefficient capillaire  $\lambda$  entre  $10^{-8}$  et  $10^{-7}$ . Dans cette plage de valeurs, on remarque que l'augmentation subite de la densité ne se fait pas au même instant, mais plus tôt lorsque  $\lambda$  augmente. Pour mieux comprendre cela, on trace l'évolution de la vitesse pour différentes valeurs de  $\lambda$  (figure 5.18). La courbe obtenue peut être divisée en deux parties :

Dans la première phase qui se poursuit jusqu'à  $t = 0.5ms$ , la vitesse de l'interface augmente proportionnellement avec l'augmentation du coefficient capillaire  $\lambda$ . La densité augmente en conséquence ainsi que la température.

Dans la seconde phase, entre  $t = 0.6ms$  à  $t = 1.2ms$ , pour chacun des cas, la vitesse augmente jusqu'à ce que la densité atteigne la densité du liquide puis la tendance s'inverse et la vitesse diminue. L'explication réside dans le fait que l'on a deux phénomènes en un. Le premier est le collapse, c'est à dire la contraction rapide de la bulle qui est soutenue par le gradient de pression immense entre l'intérieur et l'extérieur de la bulle. Cette contraction tend à accélérer le mouvement de l'interface. Le deuxième est la condensation de la phase vapeur qui se fait à des vitesses plus faibles.

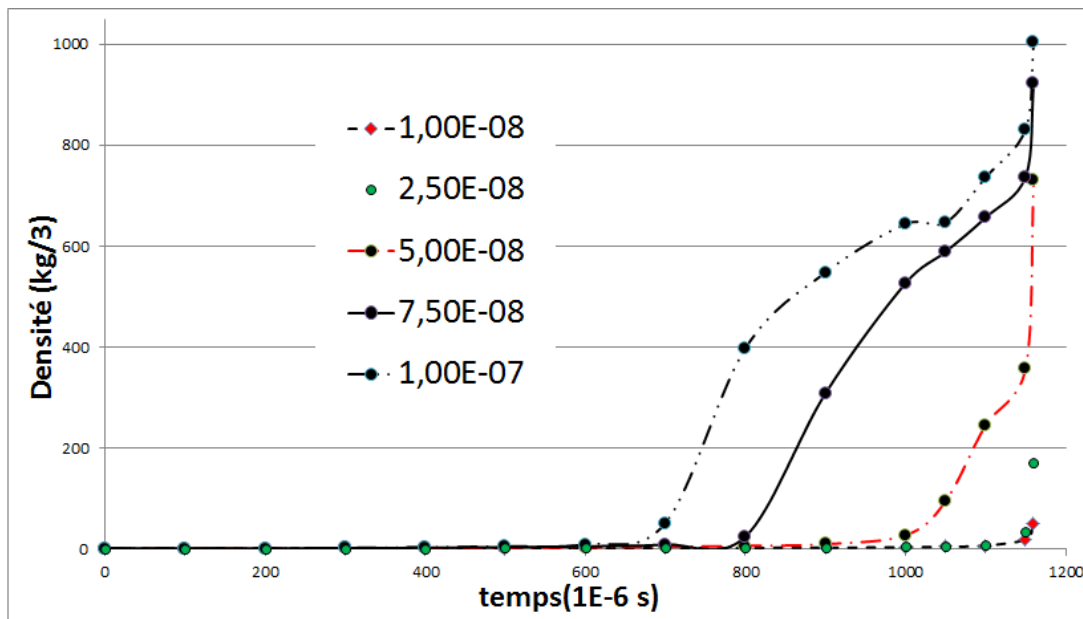


FIGURE 5.17 – L'évolution de la densité au centre de la bulle pour différentes valeurs du coefficient capillaire  $\lambda$  (entre  $10^{-8}$  et  $10^{-7}$ )

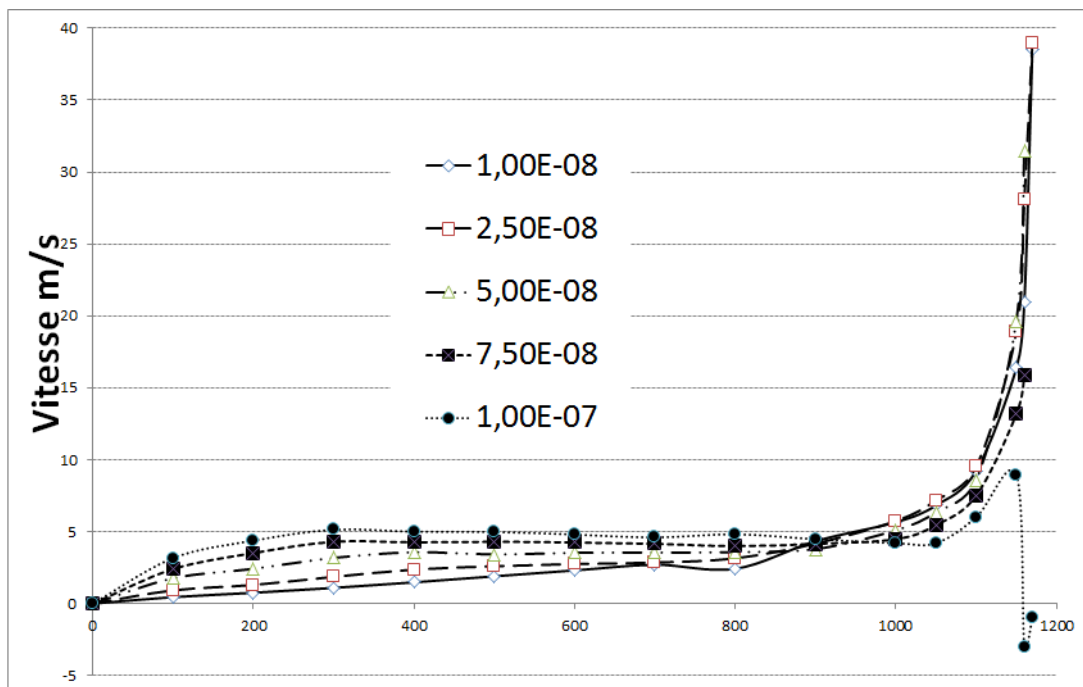


FIGURE 5.18 – L'évolution de la vitesse de l'interface liquide-vapeur pour différentes valeurs du coefficient capillaire  $\lambda$  (entre  $10^{-8}$  et  $10^{-7}$ )

En observant l'évolution de la forme des bulles de cavitation pendant le collapse, on a remarqué que pour des valeurs de  $\lambda \geq 5 \cdot 10^{-8}$  le phénomène de condensation prédomine sur le phénomène de collapse (contraction). La figure 5.19 représente la forme de la bulle pendant le collapse pour  $\lambda = 10^{-8}$  et  $\lambda = 7.5 \cdot 10^{-8}$ . Pour  $\lambda = 10^{-8}$ , la bulle garde sa forme sphérique et l'épaisseur de l'interface est inchangée par rapport à l'état initial alors que pour la seconde, l'épaisseur a augmenté et la forme de la bulle n'est plus circulaire.

Par conséquent, si l'augmentation de la tension de surface induit une intensification du collapse, à partir d'une certaine valeur du coefficient capillaire  $\lambda$ , le collapse s'efface devant le phénomène de condensation et donc on ne retrouve plus cette proportionnalité entre l'augmentation du coefficient capillaire et l'augmentation de la vitesse du collapse et donc la pression maximale atteinte lors de ce dernier.

Une interrogation subsiste néanmoins. Est ce que ce comportement serait le même si l'on imposait initialement une densité de vapeur pure dans la bulle ? On propose de tester ce cas de figure dans les perspectives immédiates.

## 5.4 Effet de la tension de surface sur la fréquence de cavitation

Pour étudier l'effet de la tension de surface sur la fréquence de cavitation nous réalisons un calcul dont les paramètres sont résumés dans le tableau 5.3. On étudie le cas de la formation de bulles de cavitation dans le sillage d'un cylindre de diamètre  $D = 0.1m$ . Le nombre de cavitation  $\sigma_c = 0.66$ .

**Tableau 5.3** Les paramètres de calcul pour l'écoulement cavitant autour d'un cylindre

$\rho_i$ $kg/m^3$	$p_i$ $Pa$	$\lambda$ $m^7kg^{-1}s^{-2}$	$T_i$ $K$	$V_\infty$ $m/s$	$Re$	$\sigma_c$
998.2	50000	$5 \cdot 10^{-8}$	293	12	$1.2 \cdot 10^6$	0.66

### 5.4.1 Domaine de calcul

Le domaine de calcul est en forme de O avec un diamètre  $D_d = 5m$ , ce qui équivaut à 100 fois le diamètre du cylindre. Dans ce cas l'hypothèse du champ lointain est vérifiée ce qui nous permet d'imposer des conditions aux limites constantes au niveau de la frontières extérieure du domaine (les perturbations

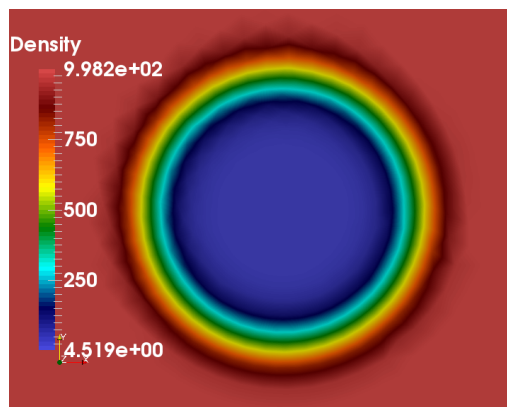
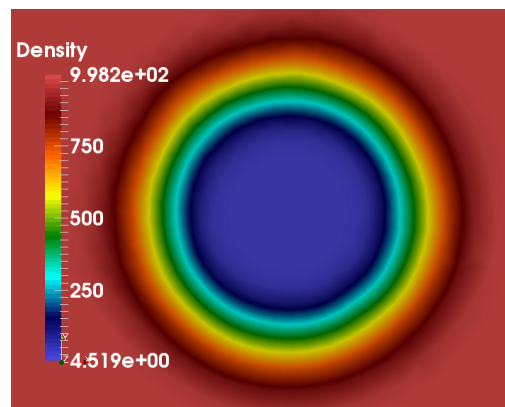
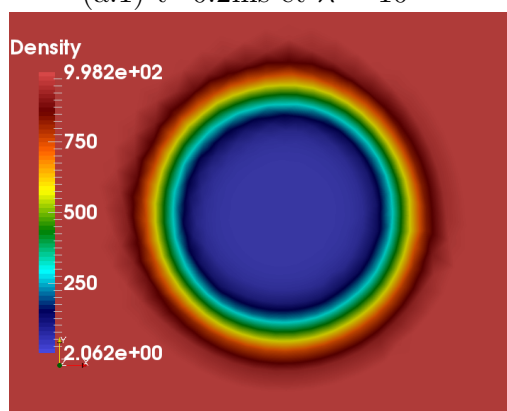
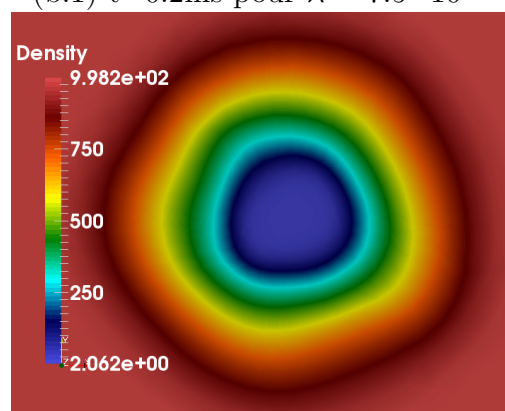
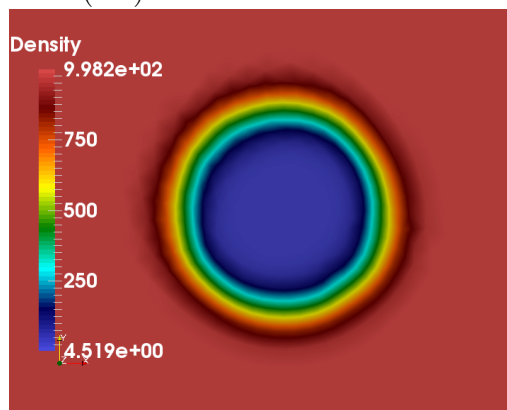
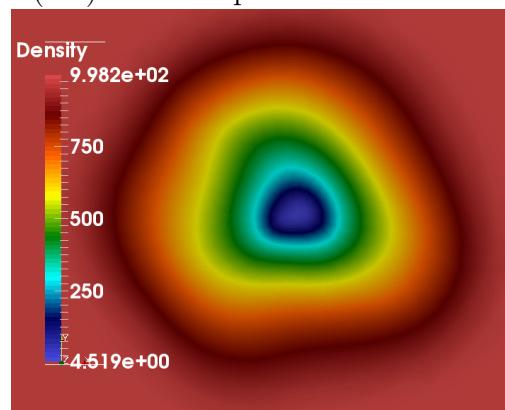
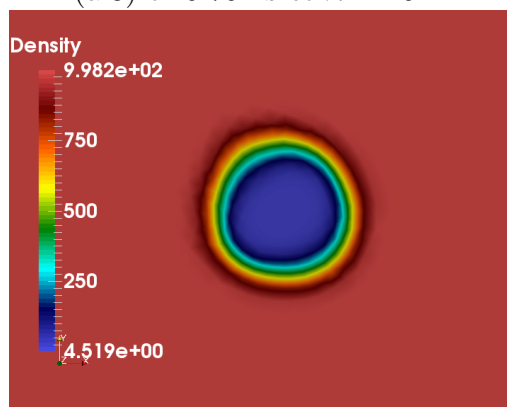
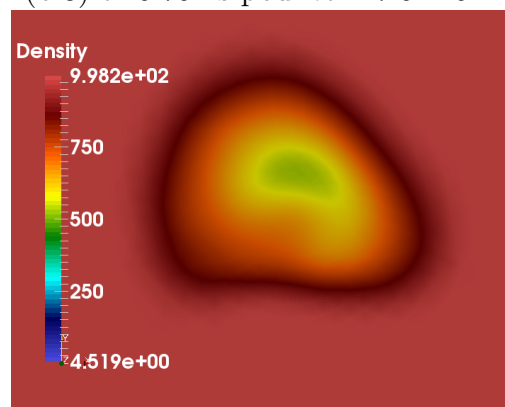
(a.1)  $t=0.2\text{ms}$  et  $\lambda = 10^{-8}$ (b.1)  $t=0.2\text{ms}$  pour  $\lambda = 7.5 \cdot 10^{-8}$ (a.2)  $t=0.5\text{ms}$  et  $\lambda = 10^{-8}$ (b.2)  $t=0.5\text{ms}$  pour  $\lambda = 7.5 \cdot 10^{-8}$ (a.3)  $t=0.75\text{ms}$  et  $\lambda = 10^{-8}$ (b.3)  $t=0.75\text{ms}$  pour  $\lambda = 7.5 \cdot 10^{-8}$ (a.4)  $t=1\text{ms}$  pour  $\lambda = 10^{-8}$ (b.4)  $t=1\text{ms}$  pour  $\lambda = 7.5 \cdot 10^{-8}$ 

FIGURE 5.19 – Évolution de la forme de la bulle de cavitation pendant le collaps

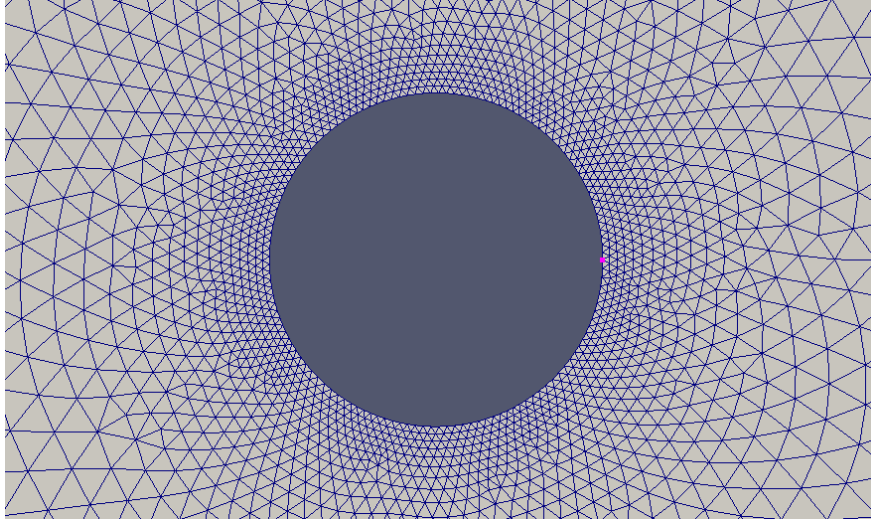


FIGURE 5.20 – la forme du maillage autour du cylindre

créées par le cylindre et qui atteignent la frontière extérieure sont dissipées et ont une amplitude très faible). Le nombre de points sur le cylindre est de 181. Nous avons utilisé un maillage non structuré de 6172 éléments triangulaires voir la figure 5.20.

Nous réalisons deux calculs. Le premier avec un coefficient capillaire  $\lambda = 0$  et le second avec un coefficient  $\lambda = 5 \cdot 10^{-8} m^7 / kgs^2$ . Le pas de temps initial est  $t = 2 \cdot 10^{-8}$ . La phase transitoire est franchie après 800000 itérations. On voit alors, les bulles de cavitation se détacher de manière périodique. Lors de cette phase on utilise un pas de temps de  $0.4 \mu s$  et on réalise une sauvegarde toute les 200 itérations ce qui correspond à  $80 \mu s$ . Nous allons, dans cette étude, comparer les fréquences d'émission de bulles de cavitation et grâce aux champs de densité nous comptons expliquer ces effets. Puisque les bulles sont assez grandes, l'effet de la tension de surface va se faire sentir au niveau de la paroi du cylindre et de son interaction avec la poche de cavitation.

#### 5.4.2 Résultats et commentaires

On présente sur la figure 5.21 une comparaison de la dynamique de la formation des nuages de cavitation sur une période de temps entre le cas sans et le cas avec tension de surface. On commence par un nuage de bulles de cavitation entièrement formé sur le haut et on finit par le nuage formé sur le bas du cylindre. On remarque que sur les images 5.21.(a.) la surface de la poche de cavitation qui est collée à la paroi est très petite et que le nuage se détache très facilement sous l'effet du jet rentrant. Sur la figure 5.21.(b) la surface de contact de la poche de

cavitation avec le cylindre est très grande et les bulles de cavitation ont mal à se détacher.

Sur les figures 5.22.(a) et 5.22.(b) est représenté l'évolution du volume de vapeur total dans le domaine de calcul en fonction du nombre de sauvegardes. Nous nous sommes assurés d'être en dehors de la zone de transition et d'être dans le régime établi. On remarque que le volume de vapeur qui se détache dans le cas sans tension de surface varie énormément d'une période à une autre alors que dans le cas avec tension de surface le volume de vapeur qui se détache reste quasiment le même.

Pour déterminer la fréquence de lâché de bulles de cavitation nous utilisons le signal du volume de vapeur lequel est traité avec une transformée de Fourier afin de déterminer le spectre des fréquences. Nous utilisons dans chaque cas un intervalle qui comporte une dizaine de périodes, la fréquence d'échantillonnage est de 12500 Hz. Nous obtenons les deux spectres représentés dans la figure 5.23.

On remarque que pour le cas avec tension de surface la fréquence de lâché des structures cavitantes est clairement représentée par un pic et elle vaut  $25.22Hz$ . Alors que dans le cas sans tension de surface. La fréquence de lâché de nuage de cavitation est moins imposante, dans ce cas on trouve une valeur de  $27.78Hz$ . On trouve donc un nombre de Strouhal de  $St_1 = 0.21$  pour le cas sans tension de surface et  $St_2 = 0.235$  pour le cas avec tension de surface. On en déduit que la tension de surface a pour effet de ralentir la fréquence du lâché de cavitation.

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons réalisé des cas test de validation de l'implémentation de la tension de surface sur le code FV-MLS avec le cas test de la bulle statique. En utilisant l'équation d'état de Van Der Waals, nous avons pu reproduire la chute de l'énergie totale conséquence de l'équilibre de la bulle ainsi que le changement de topologie mis en évidence par le cas test de la coalescence. En utilisant cette fois-ci l'équation d'état du modèle homogène, le cas de la bulle à l'équilibre statique n'est reproductible qu'en prenant en compte le changement de température à travers l'équation de conservation de l'énergie.

Nous avons aussi réalisé des calculs d'application pour déterminer l'effet de la tension de surface sur :

1. L'intensité du collapse en réalisant deux calculs. Le premier concerne l'implosion d'une bulle de cavitation formée sur l'extrados d'un profil d'aile immergé. Le principal résultat de cette étude est la courbe qui décrit l'augmentation de la pression maximale du collapse en fonction de la tension de surface. Le deuxième



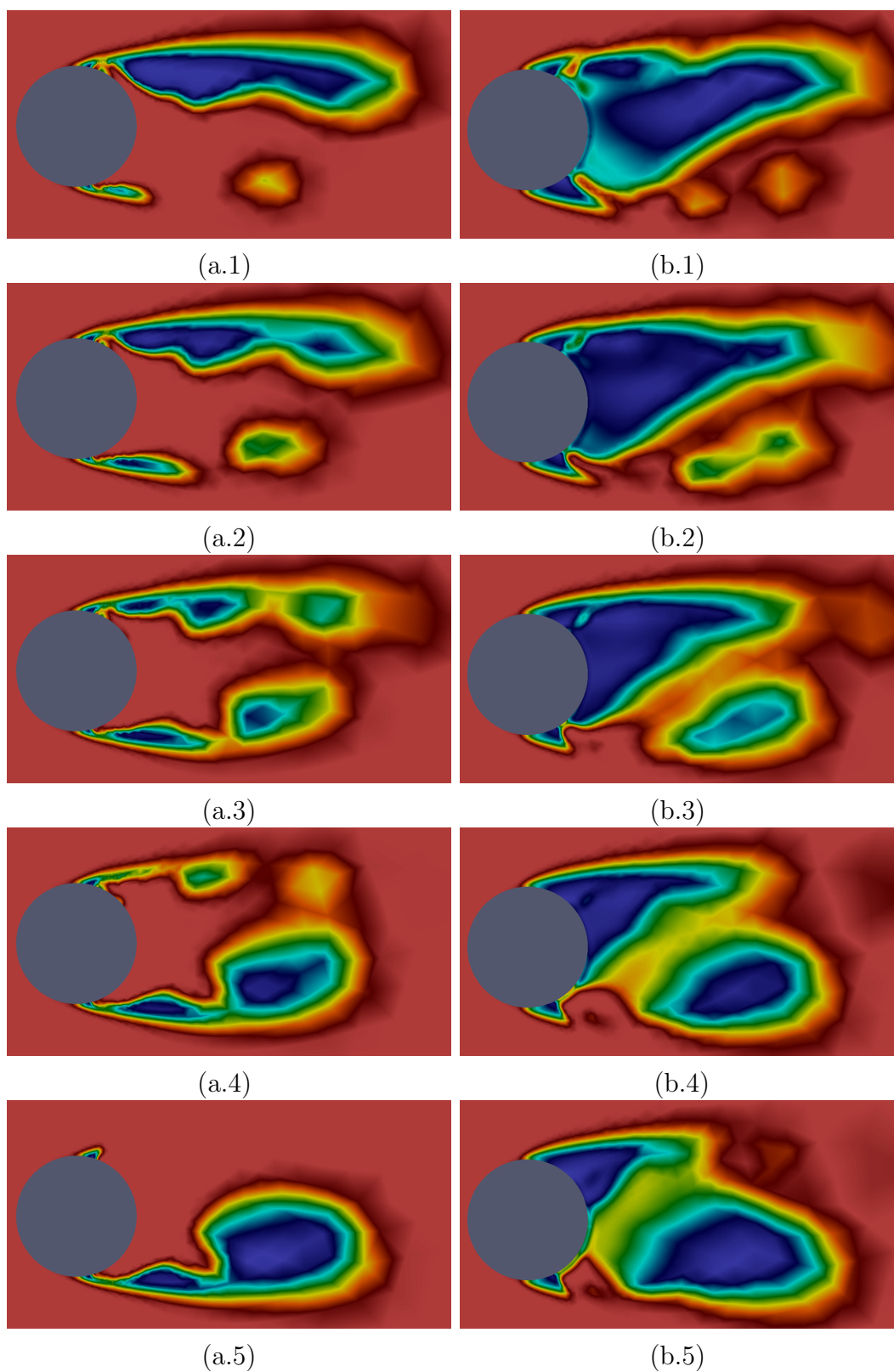


FIGURE 5.21 – Évolution de la densité s'étalant sur une période de lâché de cavitation pour un écoulement sans tension de surface (a.) et avec tension de surface (b.)



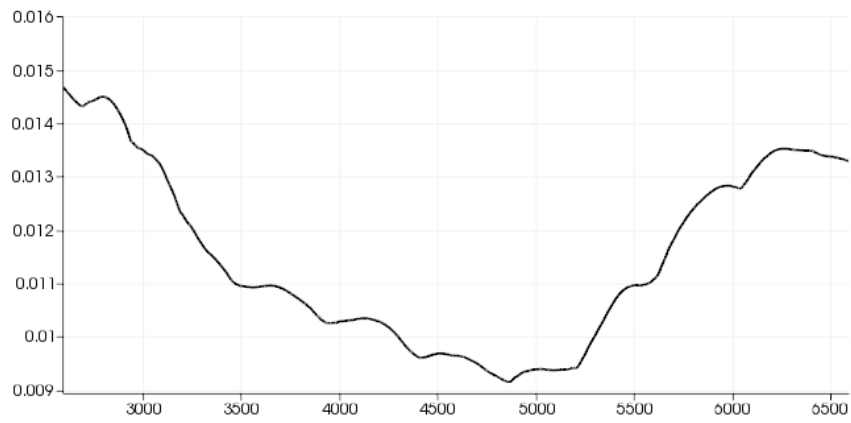
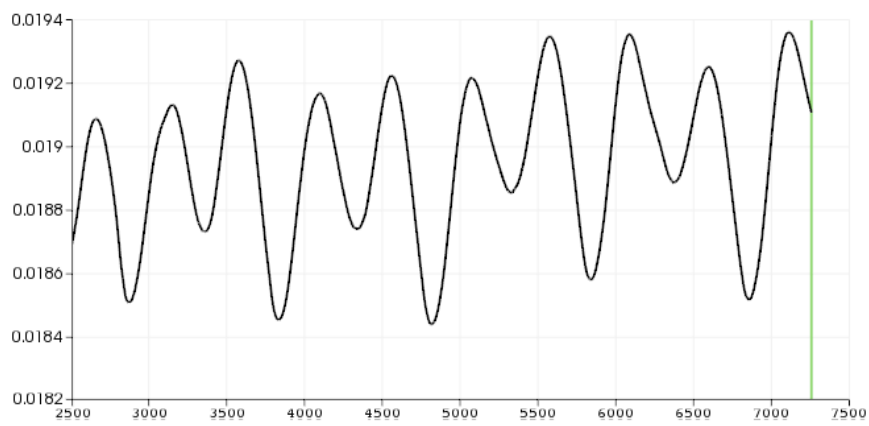
(a)  $\lambda = 0$ (b)  $\lambda = 5 \cdot 10^{-8}$ 

FIGURE 5.22 – Le signal du volume de vapeur dans le domaine ( $m^2$ ) pour environ 10 lâchés de bulle de cavitation

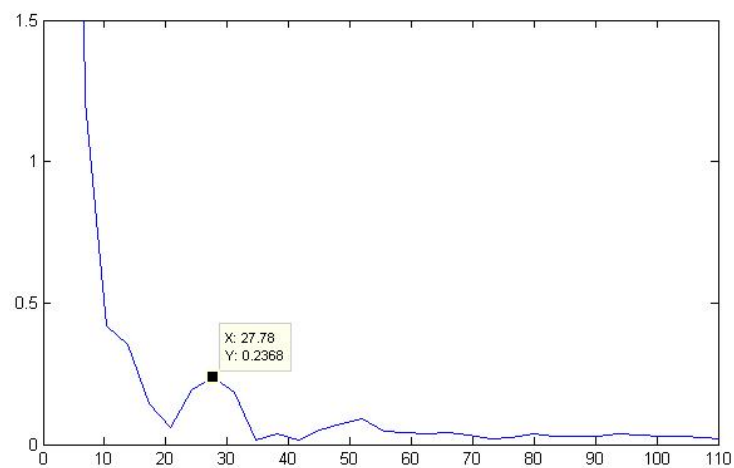
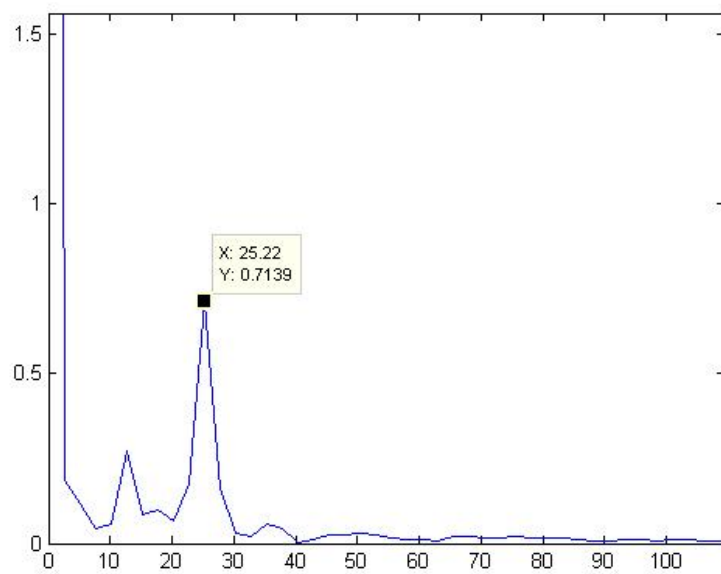
(a)  $\lambda = 0$ (b)  $\lambda = 5 \cdot 10^{-8}$ 

FIGURE 5.23 – Spectre du signal du volume de vapeur servant à déterminer la fréquence de lâché de bulle de cavitation

cas concerne l'implosion d'une bulle de vapeur immergée dans de l'eau liquide. Il en résulte que pour un coefficient capillaire  $\lambda \geq 5 \cdot 10^{-8}$  le comportement de la bulle change et le collapse cède la place à la condensation et l'épaisseur de l'interface liquide-vapeur change de taille.

2. La dynamique du lâché de bulle de cavitation sur un cylindre immergé. Il en résulte que la tension de surface a pour effet de diminuer la fréquence de cavitation et d'empêcher le développement de grandes poches de cavitation. Elle a un effet non négligeable sur l'adhérence de la poche de cavitation à la surface solide du cylindre à travers l'augmentation de la force et la surface d'adhésion de la poche avec le cylindre.

# Conclusion Générale

---

## 6.1 Résumé

Nous avons mis au point dans cette thèse un modèle de cavitation qui fait partie des modèles à un fluide. Pour considérer les changement de phase et bien simuler le comportement thermodynamique, nous avons opté pour le modèle d'équilibre homogène. Ce modèle consiste en la résolution d'un seul système d'équations de conservation qui correspond à la phase mélange. Nous avons choisi le système d'équations de Navier-Stokes & Korteweg compressibles afin de prendre en compte les efforts de tension de surface. Comme équations de fermeture nous avons utilisé : l'équation d'état de Tait modifiée pour l'eau liquide, l'équation des gaz parfaits pour la vapeur d'eau (avec  $\gamma = 1.327$ ) et la pression de saturation dans la phase de mélange.

La détermination de la vitesse du son est primordiale pour le schéma numérique que nous utilisons. Donc, pour la phase de mélange nous avons eu recours à la formule de Wallis qui consiste à combiner les vitesses du son du liquide et de la vapeur en utilisant la fraction volumique de la vapeur.

L'utilisation d'un modèle à interface diffuse pose un problème au niveau de l'épaisseur de l'interface. Si le coefficient capillaire  $\lambda$  est connu pour l'épaisseur réelle qui est de l'ordre du nanomètre, ce n'est pas le cas lors des calculs où on utilise un maillage trop grossier pour détecter la vraie épaisseur. On a opté pour une solution qui consiste à utiliser la formulation de Jamet [21] qui permet d'obtenir une expression pour le coefficient capillaire  $\lambda$  en fonction de la tension de surface et de l'épaisseur artificielle de l'interface liquide-vapeur et de la tension de surface  $\sigma$  tout en supposant un profil de densité dans l'interface. Cette démarche permet d'obtenir une bonne estimation du coefficient  $\lambda$  dans les cas test où on a utilisé le profil de densité en tangente hyperbolique car il correspond au profil utilisé pour déterminer la relation entre la tension de surface  $\sigma$  et le coefficient capillaire artificiel  $\lambda$ .

Pour la résolution des équations nous avons utilisé la méthode des volumes finis avec l'approximation par moindres carrés mobiles. La reconstruction des variables et de leurs dérivées à partir des valeurs discrètes se fait grâce à des fonctions de forme. Les fonctions de forme sont à leurs tours construites à partir

d'une base polynomiale pondérée par des fonctions kernel de type exponentiel. L'avantage étant l'utilisation de maillage non structurés et d'avoir une structure de donnée compatible avec de la programmation orienté objet. La difficulté à laquelle nous avons été confronté lors de l'utilisation de cette méthode est la sensibilité des résultats au choix des paramètres  $(\kappa, N_s)$ . Pour chaque maillage utilisé un ensemble de calculs est réalisé en changeant les valeurs de  $(\kappa, N_s)$  pour finalement trouver le bon couple de paramètres.

## 6.2 Validation du modèle

Pour valider l'implémentation de la tension de surface nous avons réalisé trois cas test. Le cas test de la bulle statique a mis en évidence que le modèle de tension de surface associé à l'équation de Van Der Waals reproduit la chute de l'énergie totale correspondant à la transition vers l'état d'équilibre dans le cas isotherme et permet d'obtenir la compression attendu. Le cas test de la bulle statique simulé par le modèle de tension de surface associé aux équations d'état du modèle homogène n'a pas été concluant dans le cas isotherme. Par contre ce même modèle associé à l'équation de conservation de l'énergie a pu reproduire l'équilibre statique d'une bulle grâce notamment au changement de température qui permet d'avoir une compression dans la bulle au delà de la pression de saturation qui subsiste à l'extérieur.

Le cas test de la coalescence ainsi que le cas test de gravitation ont montré la capacité du modèle à reproduire le changement de topologie qui est l'un des effets de la tension de surface.

Pour résumer, les bémols du modèle de tension de surface sont :

- qu'il ne supporte pas un trop fort gradient de densité. Par conséquent, si l'on souhaite simuler des phénomènes avec de la vapeurs pure et du liquide pur on doit utiliser des températures supérieurs à 340K. C'est à partir de cette température que la différence entre la densité liquide et vapeur devient calculable. Ce problème est plutôt lié au schéma numérique et non au modèle physique. Des solutions sont en train d'être explorées et sont citées dans les perspectives.

- qu'il ne peut pas reproduire l'équilibre statique dans le cas isotherme. Il est nécessaire d'utiliser l'équation de conservation de l'énergie.

- On utilise une épaisseur de l'interface qui est artificielle et dépend du maillage. Cela pose le problème de l'influence que cela peut avoir sur les paramètres physiques. Pour la tension de surface, la formule que nous avons utilisé pour calculer le coefficient  $\lambda$  en fonction de la tension de surface et de l'épaisseur artificielle de l'interface n'est valable que si le profil de densité dans l'interface est

de la forme définie dans l'équation 5.2. Dans le cas test du cylindre par exemple, nous n'imposons pas de profil de densité initiale mais les bulles se forment d'elles même alors que la relation entre  $\lambda$  et  $\sigma$  n'est pas connue.

Les points positifs du modèle sont les suivants :

- Il est possible de faire des calculs turbulents grâce aux propriétés dissipatives intrinsèques de la reconstruction MLS.

- On arrive à reproduire les efforts de tension de surface et leurs effets sur la topologie des bulles de cavitation.

- Les effets thermodynamiques dus au changement de phase sont pris en compte grâce à l'algorithme de transition de phase et au bon choix des équations d'état.

- Le code permet de simuler un large spectre de température et de pression avec comme limite la température critique (647 K) et la pression critique  $22 \cdot 10^6 Pa$ .

### 6.3 Calculs d'application

Pour étudier l'effet des forces de tension de surface sur la dynamique de la cavitation nous avons réalisé trois calculs différents qui ont permis de montrer que :

- L'augmentation de la tension de surface engendre une augmentation de la pression maximum atteinte lors du collapse jusqu'à une certaine valeur du coefficient de capillarité ( $5 \cdot 10^{-8}$ ) au delà de laquelle la tendance s'inverse.

- Pour de faibles valeurs du coefficient de capillarité  $\lambda$  entre  $10^{11}$  et  $10^{-8}$ , une augmentation du coefficient  $\lambda$  induit une augmentation de la vitesse de l'interface liquide-vapeur dans le dernier stade du collapse (à partir de  $R \leq 0.5mm$ ). Donc l'effet de la tension de surface ne se fait sentir qu'au tout dernier moment.

- Pour des valeurs du coefficient  $\lambda \geq 5 \cdot 10^{-8}$  la forme de la bulle durant le collapse ne reste pas ronde et l'épaisseur de l'interface augmente. Ce changement de topologie a pour effet de diminuer l'intensité du collapse. Ce résultat ne semble pas être physique et des investigations doivent être menées pour comprendre l'origine de cette erreur. Une des pistes est l'existence d'une limite à l'application de l'élargissement de l'interface à une taille de maille donnée.

- La tension de surface a pour effet de diminuer la fréquence des lâchés de bulles de cavitation dans le cas d'un écoulement autour d'obstacle. Elle a aussi pour effet de coller la poche de cavitation à la paroi et de diminuer la taille des bulles qui se détachent de la poche.

## 6.4 Perspectives

Pour poursuivre le travail de recherche initié dans cette thèse nous proposons dans un premier temps les actions suivantes :

- Réaliser le calcul de l'effondrement d'une bulle de vapeur en imposant comme condition initiale une densité de vapeur pure dans la bulle. C'est possible avec le code actuel. Il suffit d'utiliser une température plus élevée comme on l'a déjà réalisé dans le cas test de l'équilibre statique 5.2.1.2. Cela permet de diminuer le gradient de densité entre le liquide et sa vapeur.

- Réaliser le cas test de l'équilibre statique pour différentes valeurs du coefficient  $\lambda$  afin d'établir une corrélation entre  $\lambda$  et  $\sigma$  en utilisant la taille caractéristique du maillage.

- Reprendre l'étude réalisée dans la section 5.4 du lâché de bulles de cavitation observé dans le sillage d'un cylindre, en faisant varier la valeur du coefficient capillaire  $\lambda$  entre  $10^{-11}$  et  $10^{-7}$ .

- Implémenter des limiteurs de flux adaptés aux discontinuités dues à la cavitation pour pouvoir monter en ordre.

- Étendre le modèle au 3D tout en optimisant le code de calcul. Sachant que la sous-routine servant à calculer le terme source de tension de surface et celle qui permet de réaliser le changement de phase ne sont pas parallélisées.

- Tester un schéma numérique permettant de faire des calculs avec un fort gradient de densité. Le travail de Neusser [36] va dans ce sens. Il utilise un schéma de relaxation qui permet de simuler de forts gradients de densité.

- Prendre en compte les effets de la tension de surface sur le transfert de chaleur à travers l'implémentation du terme source de tension de surface pour l'équation de la conservation de l'énergie.

# Bibliographie

- [1] Miguel Asuaje. Méthodologie et optimisation dans la conception et l'analyse des performances des turbomachines à fluide incompressible. PhD thesis, Arts et Métiers ParisTech, 2003.
- [2] Timothy J Barth and Paul O Frederickson. Higher order solution of the euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction. AIAA paper, 90 :0013, 1990.
- [3] Lionel Bergerat. Developpement d'une methode numerique compressible pour la simulation de la cavitation en geometrie complexe. PhD thesis, Arts et Metiers ParisTech - Centre de Paris- Laboratoire DynFluid, 2012.
- [4] JU Brackbill, Douglas B Kothe, and C1 Zemach. A continuum method for modeling surface tension. Journal of computational physics, 100(2) :335–354, 1992.
- [5] Christopher E Brennen. Fundamentals of multiphase flow. Cambridge University Press, 2005.
- [6] Christopher Earls Brennen. Cavitation and bubble dynamics. Number 44. Oxford University Press, 1995.
- [7] H Bruce Stewart and Burton Wendroff. Two-phase flow : models and methods. Journal of Computational Physics, 56(3) :363–409, 1984.
- [8] Jean-Camille Chassaing, Sofiane Khelladi, and Xesús Nogueira. Accuracy assessment of a high-order moving least squares finite volume method for compressible flows. Computers & Fluids, 71 :41–53, 2013.
- [9] Luis Cueto-Felgueroso, Ignasi Colominas, Xesus Nogueira, Fermin Navar-rina, and Manuel Casteleiro. Finite volume solvers and moving least-squares approximations for the compressible navier–stokes equations on unstruc-tured grids. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(45) :4712–4736, 2007.
- [10] LF Cugliandolo and J Kurchan. On the out-of-equilibrium relaxation of the sherrington-kirkpatrick model. Journal of Physics A : Mathematical and General, 27(17) :5749, 1994.



- 
- [11] Kueny J-L. Delannoy Y. Two phase flow approach in unsteady cavitation modelling. In : Cavitation and multiphase flow forum, 8 :98 :153, 1990.
- [12] Dennis Diehl. Higher order schemes for simulation of compressible liquid-vapor flows with phase change. PhD thesis, Universitätsbibliothek Freiburg, 2007.
- [13] Nicolas Dumont. Modélisation de l'écoulement diphasique dans les injecteurs diesel. 2004.
- [14] Jean-Pierre Franc. Physics and control of cavitation. Technical report, DTIC Document, 2006.
- [15] Jean-Pierre Franc, François Avellan, Brahim Belahadji, Jean-Yves Billard, Laurence Briançon-Marjollet, Didier Fréchou, Daniel H Fruman, Ayat Karimi, Jena-Louis Kueny, and Jena-Marie Michel. La cavitation : mécanismes physiques et aspects industriels. Presses universitaires de Grenoble, 1995.
- [16] Hector Gomez, Thomas JR Hughes, Xesús Nogueira, and Victor M Calo. Isogeometric analysis of the isothermal navier–stokes–korteweg equations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(25) :1828–1840, 2010.
- [17] Eric Goncalves and Regiane Fortes Patella. Numerical simulation of cavitating flows with homogeneous models. Computers & Fluids, 38(9) :1682–1696, 2009.
- [18] Wajdi Heni, Laurent Vonna, and Hamidou Haidara. Experimental characterization of the nanoparticle size effect on the mechanical stability of nanoparticle-based coatings. Nano letters, 15(1) :442–449, 2014.
- [19] Diao M Hosny. Real time cavitation detection method. SAE transactions, 105(3) :1367–1379, 1996.
- [20] Yoshiro Iwai and Shengcai Li. Cavitation erosion in waters having different surface tensions. Wear, 254(1) :1–9, 2003.
- [21] D Jamet, O Lebaigue, N Coutris, and JM Delhaye. The second gradient method for the direct numerical simulation of liquid–vapor flows with phase change. Journal of Computational Physics, 169(2) :624–651, 2001.

- [22] Sofiane Khelladi, Xesús Nogueira, Farid Bakir, and Ignasi Colominas. Toward a higher order unsteady finite volume solver based on reproducing kernel methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 200(29) :2348–2362, 2011.
- [23] Keiichi Kitamura, Keiichiro Fujimoto, Eiji Shima, and ZJ Wang. Performance of low-dissipation euler fluxes and preconditioned implicit schemes in low speeds. AIAA Paper, 1272 :4–7, 2010.
- [24] A.H. Koop. Numerical simulation of unsteady three-dimensional sheet cavitation. PhD thesis, University of Twente, the Netherlands, 2008.
- [25] M Kornfeld and L Suvorov. On the destructive action of cavitation. Journal of Applied Physics, 15(6) :495–506, 1944.
- [26] Akihiro Kubota, Hiroharu Kato, and Hajime Yamaguchi. A new modelling of cavitating flows : A numerical study of unsteady cavitation on a hydrofoil section. Journal of fluid Mechanics, 240(1) :59–96, 1992.
- [27] GI Kuvshinov, G Ernetti, A Francescutto, P Cuti, and PP Prokhorenko. Numerical investigation of the effect of properties of the liquid on cavitation at solid surfaces. Journal of engineering physics and thermophysics, 66(4) :360–366, 1994.
- [28] Werner Lauterborn and Claus-Dieter Ohl. Cavitation bubble dynamics. Ultrasonics sonochemistry, 4(2) :65–75, 1997.
- [29] Olivier Le Métayer, Jacques Massoni, and Richard Saurel. Élaboration des lois d’état d’un liquide et de sa vapeur pour les modèles d’écoulements diphasiques. International journal of thermal sciences, 43(3) :265–276, 2004.
- [30] Yves Lecoffre. La Cavitation traqueurs de bulles. Number 1. HERMES, 1994.
- [31] Herve Lemonnier and Olivier Lebaigue. Test-case n 24 : Growth of a small bubble immersed in a superheated liquid and its collapse in a subcooled liquid (pe, pa). Multiphase Science and Technology, 16(1-3), 2004.
- [32] Meng-Sing Liou and Christopher J Steffen. A new flux splitting scheme. Journal of Computational physics, 107(1) :23–39, 1993.
- [33] Ju Liu, Hector Gomez, John A Evans, Thomas JR Hughes, and Chad M Landis. Functional entropy variables : a new methodology for deriving thermodynamically consistent algorithms for complex fluids, with particular

- reference to the isothermal navier–stokes–korteweg equations. Journal of Computational Physics, 248 :47–86, 2013.
- [34] Xiu Mei Liu, Jie He, Jian Lu, and Xiao Wu Ni. Effect of surface tension on a liquid-jet produced by the collapse of a laser-induced bubble against a rigid boundary. Optics & Laser Technology, 41(1) :21–24, 2009.
- [35] Imène Mejri-Chtioui. Analyse de l’écoulement instationnaire cavitant dans les inducteurs. PhD thesis, Paris, ENSAM, 2006.
- [36] J. Neusser, C. Rohde, and V. Schleper. Relaxed navier-stokes-korteweg equations for compressible two-phase flow with phase transition. submitted, 2014.
- [37] X Nogueira, I Colominas, L Cueto-Felgueroso, and S Khelladi. On the simulation of wave propagation with a higher-order finite volume scheme based on reproducing kernel methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(23) :1471–1490, 2010.
- [38] X Nogueira, I Colominas, L Cueto-Felgueroso, and S Khelladi. On the simulation of wave propagation with a higher-order finite volume scheme based on reproducing kernel methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(23) :1471–1490, 2010.
- [39] X Nogueira, L Cueto-Felgueroso, I Colominas, and H Gómez. Implicit large eddy simulation of non-wall-bounded turbulent flows based on the multiscale properties of a high-order finite volume method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199(9) :615–624, 2010.
- [40] Xesús Nogueira, Sofiane Khelladi, Ignasi Colominas, Luis Cueto-Felgueroso, José París, and Héctor Gómez. High-resolution finite volume methods on unstructured grids for turbulence and aeroacoustics. Archives of Computational Methods in Engineering, 18(3) :315–340, 2011.
- [41] Lord Rayleigh. Viii. on the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 34(200) :94–98, 1917.
- [42] J Sauer and GH Schnerr. Unsteady cavitating flow-a new cavitation model based on modified front capturing method and bubble dynamics. In ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting. Boston, Massachusetts, USA, 2000.

- 
- [43] David P. Schmidt S.Gopalakrishnan. Multidimensional simulation of flash-boiling fuels in injector nozzles. 21st Annual Conference on Liquid Atomization and Spray Systems, Orlando, Florida, 2008.
  - [44] Ashok K Singhal, Mahesh M Athavale, Huiying Li, and Yu Jiang. Mathematical basis and validation of the full cavitation model. Transactions-American Society of Mechanical Engineers Journal of Fluid Engineering, 124(3) :617–624, 2002.
  - [45] Kenneth S Suslick and Lawrence A Crum. Sonochemistry and sonoluminescence. Wiley-Interscience : New York, 1998.
  - [46] Venkat Venkatakrishnan. Convergence to steady state solutions of the euler equations on unstructured grids with limiters. Journal of computational physics, 118(1) :120–130, 1995.
  - [47] SA Zwick and MS Plesset. On the dynamics of small vapor bubbles in liquids. Journal of Mathematics and Physics, 33(4) :308–330, 1955.



# Calcul de la température dans la phase mélange

---

Pour déterminer la température dans la phase mélange on utilise l'équation [3.33](#). On a utilisé deux méthodes :

## A.1 Méthode de Newton

Elle consiste à trouver la valeur de la variable qui annule une fonction  $g$ . Dans notre cas la variable est la température et la fonction  $g(T)$  est définie par la relation suivante :

$$g(T) = \rho e - (\alpha \rho_{v,sat}(T) e_v(T) + (1 - \alpha) \rho_{l,sat}(T) e_l(T)) \quad (A.1)$$

La solution est donnée par la formule de Newton :

$$T_{n+1} = T_n - \frac{g(T_n)}{g'(T_n)} \quad (A.2)$$

Cette méthode est itérative. Pour trouver la solution on utilise une boucle avec un test d'arrêt du type  $|T_n - T_{n+1}| < \epsilon$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial T} = & \alpha \left( \frac{\partial \rho_{v,sat}}{\partial T}(T) (L_v + e_{0l} + C_{vv}(T - T_{0l})) + \rho_{v,sat}(T) * C_{vv} \right) + \\ & (1 - \alpha) \left( \frac{\partial \rho_{l,sat}}{\partial T}(T) (e_{0l} + C_{vl}(T - T_{0l})) + \rho_{l,sat}(T) * C_{vl} \right) \end{aligned} \quad (A.3)$$

Dans cette formule pour la dérivée de  $g$  par rapport à la température on retrouve la dérivée de la densité de saturation vapeur et liquide. Ces dernières sont explicitées dans l'annexe [B](#)

## A.2 Méthode de sous-relaxation

Cette méthode s'appuie sur une combinaison entre deux valeurs successives de la solution. C'est donc une méthode itérative qui s'écrit de la manière suivante :

$$T_{n+1} = (1 - w)T_n + wH(T_n) \quad (\text{A.4})$$

où

$$H(T_n) = \frac{(\rho e - \alpha \rho_{v,sat}(T_n)L_v - \rho e_{0l})}{(\alpha \rho_{v,sat}(T_n)C_{vv} + (1 - \alpha)\rho_{l,sat}(T_n)C_{vl})} + T_{0l} \quad (\text{A.5})$$

# Formules de saturation pour la pression et les densités liquide et vapeur

---

Nous présentons dans cette section les formules de saturation utilisées dans le code de calcul ainsi que leurs dérivées par rapport à la température. Ces formules sont tirées de la thèse de L. Bergerat [3].

$$\ln \left( \frac{p_{sat}(T)}{p_c} \right) = \frac{T_c}{T} \sum_i^7 a_i \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\hat{a}_i} \quad (B.1)$$

$$\frac{\rho_{l,sat}(T)}{\rho_c} = \sum_i^7 b_i \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\hat{b}_i} \quad (B.2)$$

$$\frac{\rho_{v,sat}(T)}{\rho_c} = \sum_i^7 c_i \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\hat{c}_i} \quad (B.3)$$

$$\frac{\partial p_{sat}(T)}{\partial T} = -p_{sat}(T) \left( \frac{T_c}{T^2} \sum_i^7 a_i \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\hat{a}_i} + \frac{1}{T} \sum_i^7 a_i \hat{a}_i \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\hat{a}_i - 1} \right) \quad (B.4)$$

$$\frac{\partial \rho_{l,sat}(T)}{\partial T} = -\rho_c \sum_i^7 b_i \hat{b}_i \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\hat{b}_i - 1} \quad (B.5)$$

$$\frac{\partial \rho_{v,sat}(T)}{\partial T} = -\rho_c \sum_i^7 c_i \hat{c}_i \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^{\hat{c}_i - 1} \quad (B.6)$$

$p_c$ ,  $T_c$  et  $\rho_c$  sont respectivement la pression, la température et la densité critiques. Pour l'eau elle sont égales à :

$$p_c = 22.12 MPa$$

$$T_c = 647.16 K$$

$$\rho_c = 322 kg/m^3$$



**ANNEXE B. FORMULES DE SATURATION POUR LA PRESSION ET  
108 LES DENSITÉS LIQUIDE ET VAPEUR**

---

Les coefficients utilisés dans les formules ci dessous sont résumés dans le tableau suivant :

**Tableau B.1** Coefficients utilisés dans le calcul des pression et densités de saturation

$i$	$a_i$	$\hat{a}_i$	$b_i$	$\hat{b}_i$	$c_i$	$\hat{c}_i$
1	0	0	1	0	0	0
2	-7.85823	1	1.99206	1/3	-2.02957	1/3
3	1.83991	3/2	1.10123	2/3	-2.68781	2/3
4	-11.7811	3	-0.512506	5/3	-5.38107	4/3
5	22.6705	7/2	-1.75263	16/3	-17.3151	3
6	-15.9393	4	-45.4485	43/3	-44.6384	37/6
7	1.775156	15/2	$-6.75615 \cdot 10^5$	110/3	-64.3486	71/6

## MODELISATION DE LA CAVITATION PAR UNE APPROCHE A INTERFACE DIFFUSE AVEC PRISE EN COMPTE DE LA TENSION DE SURFACE

**RESUME :** La cavitation est la transformation d'un liquide en vapeur qui est causée par une chute de pression en dessous de la pression de saturation vapeur. Ce phénomène se manifeste le plus souvent dans les machines et dispositifs qui sont en interaction avec des liquides. On peut citer les pompes hydrauliques, les injecteurs, les inducteurs ou encore les hélices de bateaux. Vu les effets néfastes qu'elle engendre : bruit, vibrations, détérioration du métal et baisse des performances (chute des rendements et pertes de charges), sa prise en compte est indispensable dans le design de ces machines. Cette thèse a pour objectif de modéliser ce phénomène de manière à reproduire la nucléation, la convection et l'implosion des bulles de cavitation. Nous nous basons sur un modèle à interface diffuse (le modèle d'équilibre homogène) sur lequel nous greffons un modèle de tension de surface basé sur les équations de Navier-Stokes & Korteweg compressibles. Nous réalisons en somme une étude sur l'influence de la tension de surface sur le phénomène de collapse. Nous utilisons un code de volumes finis dont la discrétisation spatiale est assurée par la méthode des moindres carrés mobiles. Combinée à un solveur de Riemann de type SLAU, le modèle numérique permet d'outre passer les difficultés liées à la nature du phénomène de cavitation qui sont principalement les forts gradients qui subsistent à travers l'interface liquide-vapeur. L'autre point traité dans la thèse est la détermination d'un coefficient capillaire numérique qui correspond à une tension de surface réelle en fonction de l'épaisseur de l'interface artificiellement élargie pour un maillage donné.

**Mots clés :** cavitation, modèle de cavitation, modèle d'équilibre homogène, FV-MLS, Navier-Stokes & Korteweg, tension de surface, coefficient capillaire, interface diffuse.

## A DIFFUSE INTERFACE MODEL FOR CAVITATION TAKING INTO ACCOUNT SURFACE TENSION FORCE

**ABSTRACT :** Cavitation is the transformation of a liquid into vapor which is caused by a pressure drop below the vapor saturation pressure. This phenomenon usually occurs in turbine engines that interact with liquids like: hydraulic pumps, injectors, inductors or boat propellers. View its negative effects: noise, vibrations, damage to the metal and decreased performance, it should be included in the design of turbomachinery. The main objective of this thesis is to model this phenomenon so as to reproduce the nucleation, convection and the implosion of cavitation bubbles. We rely on a diffuse interface model (the homogeneous equilibrium model) on which we graft a surface tension model based on compressible Navier Stokes & Korteweg equations. We study the influence of surface tension on the bubble collapse. We used a finite volume approach whose spatial discretization is made by moving least squared method. Coupled with a Riemann solver called SLAU, the numerical model can go further difficulties related to the nature of the cavitation phenomenon which is mainly the strong gradients that remain through the liquid-vapor interface. Another issue addressed in this thesis is the determination of a numerical capillary coefficient which corresponds to a real surface tension in function of the thickness of the artificially extended interface for a given mesh.

**Keywords :** cavitation, modèle de cavitation, homogeneous equilibrium model, FV-MLS, Navier-Stokes & Korteweg, surface tension, capillary coefficient, diffuse interface.

